CÔNG PHÁ

ĐỀ THI THPT QUỐC GIA

MÔN TOÁN

BẰNG

KỸ THUẬT CASIO

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

NHẬP MÔN KỸ THUẬT CASIO

Kỹ thuật CASIO luyện thi THPT Quốc gia là 1 tập hợp những thao tác sử dụng MTBT CASIO theo cách khác bình thường mà thậm chí những người thi Học sinh giỏi giải toán trên máy tính CASIO cũng chưa chắc đã thực hiện được. Bởi vì Kỹ thuật CASIO ở đây được sáng tạo dưới hình thức luyện thi THPT Quốc gia, mà những bài toán trong đề thi Học sinh giỏi giải toán trên máy tính CASIO thì lại thuộc một dạng khác hẳn.

Kỹ thuật CASIO hướng đến mục tiêu:

+ Thứ nhất: luyện cho các bạn sự dẻo tay khi bấm máy tính trong quá trình giải toán. Sau 1 thời gian luyện tập nó sẽ khiến các bạn nhanh nhạy hơn khi cầm máy trước 1 vấn đề dù là nhỏ, dẫn đến tăng tốc độ "**CÔNG PHÁ**" trước giới hạn của thời gian.

+ Thứ hai: đưa ra cho các bạn những phương pháp bấm máy hiệu quả để tránh những thao tác thuộc loại "trâu bò" mà lâu nay nhiều bạn vẫn đang bấm, xử lí đẹp những số liệu xấu, và tìm ra hướng giải ngắn nhất cho bài toán. Dù đề thi ngày càng hướng đến tư duy, suy luận cao và tìm cách hạn chế việc bấm máy, nhưng một khi đã học Kỹ thuật CASIO rồi thì còn lâu Bộ mới hạn chế được các bạn sử dụng máy tính, miễn là được mang máy vào phòng thi! ☺

+ Thứ ba: luyện cho các bạn sự linh hoạt khi sử dụng máy tính. Đó là niềm đam mê nghiên cứu khám phá những tính năng mới, lối tư duy bài toán kết hợp hài hòa giữa việc giải tay và giải máy, và óc sáng tạo để tìm ra những phương pháp ngày càng ngắn gọn, nhắm đến tối ưu hóa quá trình giải toán. Và từ đó, các bạn có thể tự nghiên cứu mở rộng Kỹ thuật CASIO sang những môn học tự nhiên khác.

+ Thứ tư: thành thục Kỹ thuật CASIO kết hợp với vốn kiến thức Toán học của các bạn, sẽ tạo nên 1 tâm lý vững vàng khi bước vào kì thi (tất nhiên là không được phép chủ quan đâu đấy! ☺).

Để đạt được những điều đó, mình đã phải suy nghĩ rất nhiều khi viết cuốn sách này:

+ Thứ nhất là phải sử dụng cách truyền đạt nào để các bạn dễ tiếp thu nhất mà lại kích thích được óc sáng tạo của các bạn chứ không phải tính ỷ lại!

Muốn vậy, mình đã chắt lọc một lượng VD vừa đủ đưa vào, cũng như phân tích bài toán ở một mức độ đủ dài để các bạn tiếp thu được. Dù có 1 số bài mình đã chuẩn bị đầy đủ trước khi viết vào, nhưng cũng như hầu hết các bài tự bịa ngay lúc viết, mình phân tích theo đúng tư duy của 1 người vừa mới bắt đầu tiếp xúc vấn đề mới chứ không phải là đã chuẩn bị để nói lại. Do đó, các hướng làm đưa ra sẽ có dài có ngắn, có hay có dở, thậm chí tắc cũng có! ☺

Trong quá trình phân tích mình sẽ thường xuyên hỏi các bạn những câu hỏi để tìm ra công việc tiếp theo phải làm, và để rèn luyện tư duy thì các bạn nên thử suy nghĩ nó trước khi đọc tiếp.

+ Thứ hai: không những phân tích dễ hiểu, mà phải có thêm chút hương vị hài hước để tạo hứng thú cho các bạn đam mê khám phá! ☺

Vậy bám sát những Kỹ thuật CASIO như thế này liệu có làm các bạn "suy giảm trí tuệ" không nhỉ?

Câu hỏi đó đáng phải trả lời đấy! ☺

Các bạn sẽ tư duy kém đi nếu như một phép tính đơn giản như $45 \div 32; 665 - 23; \ldots$ cũng lôi máy bấm. Những cái đó các bạn hãy cố gắng nhẩm trong quá trình học, tập nhẩm tính thường xuyên sẽ giúp cho đầu óc nhanh nhạy hơn đấy, còn trong này thì không dạy mấy cái đó. Nếu muốn các bạn có thể search Google tìm 30 kỹ thuật tính nhẩm nhanh nhất mà luyện tập mỗi ngày.

Những kỹ thuật tối ưu hóa trong này phần nhiều sẽ giúp các bạn loại bỏ những công việc đơn giản nhưng lại mất thời gian, hoặc không cần thiết, VD như khai triển đa thức bậc cao, nhẩm nghiệm PT,… Những cái đó sẽ không làm cho bạn bị dốt đi. ☺

Tuy nhiên những kỹ thuật cao hơn như phân tích PT, hệ PT, khai căn số phức hay chứng minh BĐT đối xứng là những kỹ thuật mà nếu lạm dụng quá mức các bạn sẽ dốt đi. Do đó, hãy luyện tập giải tay cho ổn rồi hãy tính đến máy tính. Và vì vậy, Kỹ thuật CASIO sẽ phù

hợp hơn với những HS lớp 12 nói riêng và luyện thi THPT Quốc gia nói chung hơn là HS lớp 10; 11.

Nhưng dù học thế nào thì các bạn cũng phải nhớ tinh thần học xuyên suốt của chúng ta, đó là: không ngừng sáng tạo vươn xa! Mình thiết nghĩ nếu có thể đưa việc sáng tạo kỹ thuật CASIO vào làm 1 môn học trong chương trình THPT thì nó cũng khó hơn môn Tin học hiện tại đấy! (Thuận miệng nói vui!!! ☺).

Bằng cách cố gắng xây dựng cầu nối giữa những bài toán chưa tìm ra cách giải với những vấn đề tương đồng mà máy tính có thể làm được, kết hợp với việc áp dụng những kỹ thuật đã có sẵn trong này để xử lí thử, thì các bạn có thể nghiên cứu ra được kỹ thuật CASIO cho bài toán đó. Từ đó mở rộng phạm vi áp dụng của nó để kỹ thuật trở nên hoàn chỉnh và hữu ích hơn. ☺

Đấy chính là phương pháp nghiên cứu cơ bản mà mình đã áp dụng, và nói sơ qua 1 chút cho các bạn có thêm ý chí khám phá! ☺

Loại máy tính mình sử dụng trong này khá thông dụng: CASIO fx-570ES, các loại khác chỉ cần có màn hình hiển thị tương tự là áp dụng được (tự điều chỉnh làm theo được chứ?), thậm chí có nhiều chức năng hơn nữa và những cái đó đều đang chờ các bạn khai thác.

Tất cả những gì trong cuốn sách này không phải do mình hoàn toàn nghiên cứu ra, nhiều Kỹ thuật đã được mình sưu tầm từ nhiều nguồn khác nhau, tiêu biểu là các tác giả:

+ Bạn Bùi Thế Việt: hiện là admin Fb group: Thủ Thuật Giải Toán Bằng CASIO. Link group: https://www.facebook.com/thuthuatcasio

+ Thầy Đoàn Trí Dũng: admin Fb group: VIDEO BÀI GIẢNG CASIO MAN. Link group: https://www.facebook.com/groups/141497249516023

+ Anh Nguyễn Thế Lực: fanpage: Bí Kíp Thế Lực. Link fanpage: https://www.facebook.com/bikiptheluc.com.No1

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Nếu các bạn muốn giỏi Kỹ thuật CASIO, các bạn cũng cần phải tìm tòi học hỏi thật nhiều như thế!

Lời cuối cùng mình muốn nói, là những trang sách này được phép sao chép dưới mọi hình thức, có điều, hãy ghi rõ nguồn và tác giả khi sao chép! ☺

Facebook của mình, có gì thắc mắc các bạn cứ liên hệ:
https://www.facebook.com/profile.php?id=100009537923474

Chúc các bạn học tốt! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

I. Một số kỹ thuật đơn giản nhưng quan trọng

Hẳn nhiều người sẽ có chút thắc mắc về việc chia phần ra làm **kỹ thuật đơn giản** và **kỹ thuật phức tạp** như thế này làm gì cho mất công, theo họ chắc chỉ cần sắp xếp các kỹ thuật từ dễ đến khó là được rồi.

Mình cũng đã nghĩ qua vấn đề đó.

Mình thấy làm vậy cũng hợp lí, song vì một lí do khác mà mình mới tách riêng ra làm 2 phần và thêm cụm từ "nhưng quan trọng" vào, nghe hơi đớ chút nhưng lại đánh dấu được cái "lí do khác" đó. ☺

Lí do đó là: những kỹ thuật ở phần này là những kỹ thuật sẽ xuất hiện trong hầu hết các kỹ thuật ở phần thứ hai, nghĩa là chúng được dùng xuyên suốt trong các kỹ thuật phức tạp sau này và là một thao tác phụ trợ cho các kỹ thuật đó.

Nói cách khác, chúng mang tính kết nối, và là những điểm chung của các kỹ thuật phức tạp, còn về những kỹ thuật phức tạp kia, hầu như nội dung không hề có gì liên quan đến nhau cả. Vì lẽ đó bọn chúng mới được "ở nhà riêng"! ☺

Và cũng vì vậy mà những kỹ thuật nhỏ này rất "quan trọng", chúng là 1 thao tác góp phần tăng nhanh tốc độ giải toán mà các bạn cần nắm kỹ trước khi lĩnh hội những kỹ thuật phía sau.

Bây giờ chúng ta bắt đầu! ☺

1. Nhập phương trình hiệu quả nhất

Cái này chắc chắn rất nhiều người sẽ lờ đi, nhưng tiếc thay người đó chưa chắc đã biết cách nhập PT (phương trình) thế nào mới là phù hợp, thuận tiện tính toán nhất.

Đơn giản các bạn nghĩ rằng PT thế nào thì nhập vào thế, nhưng nếu nhập thêm kí hiệu "$=0$" vào thì việc kết hợp với các kỹ thuật cao cấp khác ở các phần sau sẽ rất bất tiện, gây

chậm chạp, do đó các bạn không nên nhập kí hiệu "= 0" mà chuyển hết các đại lượng sang vế trái rồi nhập mình vế trái vào thôi! ☺

VD. Ta nhập PT $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ vào máy như hình sau:

$2(x^2+2)-5\sqrt{x^3+1}$

Khi nhập như thế này, bạn sẽ:

+ Thứ nhất: tối ưu hóa được việc giải nghiệm PT ở kĩ xảo phía dưới.

+ Thứ hai: tính giá trị của biểu thức $2(x^2+2)-5\sqrt{x^3+1}$ với các giá trị x khác nhau rất nhanh mà chỉ cần nhấn $\boxed{CALC}$ luôn không cần quay lại xóa 2 kí tự "= 0" (nhất là khi PT cồng kềnh), hoặc khi sửa PT thành biểu thức để tính với $\boxed{CALC}$ cũng rất nhanh.

2. Tối ưu hóa việc giải nghiệm PT

Chúng ta vẫn xét PT trên: $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$

Sau khi nhập PT theo kỹ thuật 1, các bạn nhấn $\boxed{=}$, khi đó ra kết quả mấy kệ nó vì ta chỉ cần giữ lại được PT để giải nhiều lần là được. Cái kết quả ấy chẳng qua chỉ tại giá trị X có sẵn từ trước mà thôi.

Khởi đầu các bạn nên gán X theo điều kiện (ĐK) của x, nếu không tìm được (hoặc ngại tìm) ĐK thì các bạn cứ gán X = 0 (nếu X chưa bằng 0), đó được gọi là giá trị khởi đầu của việc dò nghiệm.

Bài này sau khi gán X = 0, máy cho ta $X \approx 5,541381265$, các bạn lưu nó vào biến A.

Ở đây có 1 thao tác mình phải nhắc lại vì còn khá nhiều người không biết làm sao, đó là để lưu nghiệm trong biến này (cụ thể là X, do ban đầu ta dùng biến X để giải) sang biến khác

(ở đây là biến A) các bạn nhấn: [ALPHA] [X] [SHIFT] [RCL] (STO) [(−)] (A), khi đó màn hình hiện $X \to A$

Bây giờ các bạn nhấn [Δ] để quay lên PT đã lưu, nhấn [▷] con trỏ sẽ nằm ở đầu. Tiếp tục nhấn [(] [◁] [SHIFT] [DEL], lúc này con trỏ sẽ chuyển thành hình tam giác, đó chính là chức năng chèn biểu thức đang xuất hiện vào 1 biểu thức khác. Cụ thể nó hiện như hình:

$$\triangleright\left(2(X^2+2)-5\sqrt{X^3+1}\right.$$

Tiếp tục bấm [□/□], biểu thức đang xuất hiện được chèn ngay lên tử số của 1 phân thức nào đó. Tiếp tục các thao tác chỉnh sửa ta thu được:

$$\frac{2(X^2+2)-5\sqrt{X^3+1}}{(X-A)}$$

(chú ý phải có dấu ngoặc đơn dưới mẫu!)

Bây giờ các bạn tiếp tục cho máy giải PT $\dfrac{2(X^2+2)-5\sqrt{X^3+1}}{(X-A)}$, máy hỏi giá trị X hay A đừng có thay đổi, cứ thế mà [=] [=] cho nó giải thôi! ☺

Do ta đưa $(X-A)$ xuống mẫu nên tuyệt nhiên máy không thể hiển thị lại cái nghiệm đã tìm ở trên (đã lưu vào A), buộc phải tìm nghiệm khác (nếu có). Và như vậy ta đã tối đa hóa được việc vét nghiệm của PT.

Nghiệm mới ta thu được chính là: $X \approx -5,541381265$. Trước khi lưu nó vào B các bạn lại quay lại PT $\dfrac{2(X^2+2)-5\sqrt{X^3+1}}{(X-A)}$ và ấn [=] để lưu nó lại (kết quả mấy vẫn mặc kệ! ☺).

Bây giờ, thực hiện thao tác tương tự các bạn sửa PT kia thành $\frac{2(X^2+2)-5\sqrt{X^3+1}}{(X-A)(X-B)}$ sau đó lại cho máy giải, không cần quan tâm các giá trị X, A, B làm gì…

Vâng, lần này máy báo Can't Solve, nghĩa là PT $\frac{2(X^2+2)-5\sqrt{X^3+1}}{(X-A)(X-B)}$ vô nghiệm, nói cách khác, PT đã cho không còn nghiệm nào khác ngoài 2 nghiệm A, B nữa cả. ☺

Vậy với PT có vô số nghiệm như PT lượng giác thì sao?

Khi học một kỹ thuật, các bạn sẽ chỉ tiếp thu tốt nhất khi biết đặt ra những băn khoăn, thắc mắc về một vấn đề nào đó đang được nói đến. ☺

Với PT lượng giác, nghiệm của nó có dạng $x = a\pi + kb\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, trong đó $a \in (-2;2)$, do đó để việc vét nghiệm của PT lượng giác mà chúng có ích cho việc giải PT, thì ta chỉ cần vét hết các giá trị a là được, còn phần $kb\pi$ thì không cần quan tâm. Và cách vét đó, hoàn toàn giống như với các loại PT khác đã nói ở trên, với giá trị ban đầu X = 0

Khi đọc đến những phần ở phía sau liên quan đến việc giải PT lượng giác, các bạn sẽ được hiểu rõ hơn các thao tác mình sử dụng để vét nghiệm của nó như thế nào… ☺

3. <u>Nguyên tắc thử giá trị tốt nhất</u>

Nguyên tắc đơn giản này là do mình nghĩ ra, và từ trước đến nay cũng chưa thấy tài liệu về MTBT nào có đề cập đến nó, nên các bạn xem như đây là lần đầu tiên nó được đưa ra vậy! ☺

Như đã nói, nguyên tắc này rất đơn giản, đó là khi muốn kiểm tra bằng máy tính xem $f(x) = g(x)$ hay không, ta sẽ nhập khoảng 1; 2 giá trị X phù hợp để tính giá trị biểu thức $f(X) - g(X)$, nếu kết quả đều bằng 0 thì chứng tỏ $f(x) = g(x)$! ☺

Nói ra có vẻ buồn cười, nhưng thực ra không phải các bạn cứ thử 2 giá trị X bất kì là có thể kết luận được $f(x) = g(x)$ ngay đâu! Thời gian thì không cho phép, đã là kĩ thuật tối ưu hóa thì phải làm sao tối ưu được cả thời gian chứ không phải chỉ mình kết quả.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Cụ thể:

+ Nếu f(x), g(x) là các hàm vô tỉ (chứa căn), ta thử với X là các số thập phân hữu hạn (như 1,364; 5,2235;…).

+ Nếu chúng là các hàm lượng giác, ta thử với các số nguyên khác 0 (càng lớn càng tốt).

+ Cuối cùng nếu f(x), g(x) không rơi vào 2 trường hợp trên, thì ta gán X là các số siêu việt (như $\pi; e; \ldots$).

Mình quy định ra những cách thử khác nhau như vậy mục đích là để chỉ cần thử 1; 2 lần là đã kết luận được có xảy ra $f(x) = g(x)$ một cách chắc chắn nhất, việc đó đơn giản chỉ là dựa vào đặc trưng của hàm mà ta muốn thử mà thôi.

Chính vì những điều trên mà công việc có vẻ buồn cười này mới được xem là 1 kỹ thuật.

Nhìn có vẻ là làm phức tạp hóa vấn đề nhưng thực ra không phải đâu, các bạn dùng 1 vài lần sẽ quen ngay thôi. Nó sẽ biến thành phản xạ tự nhiên của các bạn.

Giống như mình ấy: dùng nó như là 1 phản xạ tự nhiên từ trước đến giờ và chỉ phân định rạch ròi ra làm 3 kiểu như vậy khi viết sách này. ☺

VD. Ta đã biết các đẳng thức lượng giác sau đây là đúng: $\begin{cases} \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Thế nhưng khi ngồi trong phòng thi rồi thì không ít người sẽ nhầm lẫn khi nhớ những đẳng thức này. Cụ thể nếu chúng ta chỉ nhớ mang máng thôi thì ta sẽ làm sao để xác định chính xác được $\cos x - \sin x = ?$

Giả sử mình nhớ mang máng rằng $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, khi đó mình nhập vào máy như sau: $\cos(X) - \sin(X) - \sqrt{2}\cos\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$ (lưu ý nếu các bạn đã ghi $\frac{\pi}{4}$ thì máy phải đặt chế độ radian, nếu không bị sai lại trách mình! ☺).

Sử dụng $\boxed{CALC}$ để tính biểu thức $f(x) = \cos x - \sin x - \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, nếu ai không biết kỹ thuật này, thông thường sẽ gán $X = 0$ hoặc đẹp như $X = \pi$, và thu được kết quả:

$f(0) = f(\pi) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, hoàn toàn sai!

Thay vào đó, với kỹ thuật trên, ta cho X = 1 đi, thu được $f(1) = -1,68294197$ và kết luận luôn $\cos x - \sin x \neq \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (khác nhau thì chỉ cần 1 giá trị là đủ).

Do đó, quay lại biểu thức đã nhập, mình sửa thành $\cos(X) - \sin(X) - \sqrt{2}\cos\left(X + \frac{\pi}{4}\right)$ (vẫn theo những gì nhớ mang máng! ☺).

Vâng, lần này với $\left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$ thì ta đều thu được kết quả = 0

Vậy ta kết luận chắc chắn: $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Qua VD trên các bạn rút ra được điều gì?

Rõ ràng, chúng ta thấy điều kiện tiên quyết để sử dụng kỹ thuật này là chúng ta phải nhớ mang máng biểu thức ở bên vế phải (cái mà ta cần biến đổi thành), còn vế bên trái thì đã có trong đề bài rồi (có có sẵn thì ta mới cần đẳng thức để biến đổi chứ! ☺).

Thà nhớ ít rồi sửa và thử nhiều lần, còn hơn không nhớ 1 tí gì. Dẫu áp dụng thủ thuật có cao siêu đến đâu thì cũng cần có kiến thức, dù rất ít!

Sau này khi sử dụng đến mình sẽ viết tắt kỹ thuật này là "nguyên tắc TGTTN" nhé!



II. Những kỹ thuật phức tạp

Sau đây các bạn sẽ được học những kỹ thuật mang tính độc lập cho từng dạng toán, khác với sự xuyên suốt trong hầu hết các bài toán ở phần **I**.

Những kỹ thuật này đòi hỏi sự phân tích, tính toán nhiều bước hơn hẳn và quan trọng là cần sự linh hoạt trong mỗi một hoàn cảnh nhất định, đơn giản là vì những kỹ thuật này nhiều bước hơn nữa mình không thể kể hết ra cho các bạn tất cả những trường hợp có thể gặp phải, mà chỉ nói được những gì hay gặp nhất thôi. ☺

Học thủ thuật máy tính luôn cần sự sáng tạo và linh hoạt kết hợp các phương pháp khác nhau, có như vậy mới có thể tận dụng hết được những chức năng của máy tính cũng như giải quyết được bài toán một cách nhanh nhất.

1. Xác định nghiệm đẹp của phương trình

Như các bạn biết, PT mũ và loga là loại PT đơn giản nhất trong đề thi THPT Quốc gia môn Toán, thứ nhì là PT lượng giác, và cuối cùng là loại PT thuộc phần phân loại HS khá - giỏi, đó là PT vô tỉ.

Đặc trưng nghiệm của mỗi loại thì chỉ có 3 loại, đó là:

+ Nghiệm là số hữu tỉ.

+ Họ nghiệm lượng giác $x = a\pi + kb\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

+ Nghiệm vô tỉ thuộc dạng PT bậc 2: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Vì PT mũ và loga là loại dễ nhất, nên mình sẽ không nói thêm nữa. Các bạn trong quá trình học có thể thấy nó dài, nó phức tạp hay như thế nào đấy thì tùy nhưng khi thử làm đề thi THPT Quốc gia rồi thì mới thấy nó thật không đáng tính tiền. Nếu chẳng may nó có khó để xuất hiện trong đề thi HSG thì thường sẽ khó sau khi chuyển được về PT vô tỉ thôi. ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Còn PT lượng giác, bắt đầu từ năm 2015 Bộ đã thế nó bằng câu tính giá trị của biểu thức lượng giác, tuy không hoàn toàn liên quan đến PT lượng giác nhưng mình cũng vẫn viết vì không thể tránh được trường hợp Bộ sẽ quay lại cho HS giải PT.

a) Về nghiệm của PT hiển thị trên MTBT

Phần này mình đã bổ sung vào sau khi suy ngẫm lại, vì thực ra lúc đầu mình cũng nghĩ nó không quan trọng, ai cũng biết cả rồi. ☺

Nghiệm nguyên thì không nói làm gì rồi, nhưng nếu không nguyên thì sao?

Trong trường hợp đó, thao tác nhấn $\boxed{RCL}\boxed{)}$ để hiển thị lại dạng đẹp (nếu có thể) của nghiệm (mà máy tự động lưu trong X) là cái ai cũng làm được.

Tuy nhiên chúng ta cần xét thêm đến cái sai số của máy tính gây ra bởi việc sử dụng thuật toán lặp Newton để dò (đúng hơn là hội tụ nghiệm) của máy tính bỏ túi hiện nay. Điều đó nghĩa là không một nghiệm nào máy giải ra thực sự là chính xác, nói cách khác các nghiệm nguyên mà các bạn thu được thực ra đã được chức năng làm tròn sửa đổi thành số nguyên (và thành nghiệm chính xác), từ cái nghiệm thực sự của quá trình hội tụ. Và do đó, nếu nghiệm không hữu tỉ thì việc hiện lại dạng đẹp hầu như không thể.

Nghiệm của quá trình giải đó thực ra là kết quả của 1 phép tính giới hạn! Mình đã kiểm tra được điều đó bằng cách xây dựng lại quá trình dò nghiệm bằng thuật toán lặp Newton nói trên của máy, cụ thể mình sử dụng lệnh tổng quát sau để dò nghiệm: $X = X - \dfrac{f(X)}{f'(X)}$

VD1. Xét PT $f(x) = x^2 + x - 6 = 0$

Ta có $f'(x) = 2x + 1$, khi đó mình nhập vào máy tính lệnh $X = X - \dfrac{X^2 + X - 6}{2X + 1}$ sau đó nhấn $\boxed{CALC}$, nhập giá trị khởi đầu, chẳng hạn cho X = 0 đi (tương tự như khi giải bằng Solve), sau đó ấn $\boxed{=}$ liên tù tì và xem quá trình hội tụ nghiệm diễn ra.

Có phải các kết quả các bạn thấy trên màn hình hội tụ dần về 2 đúng không? Đến 1 lúc nào đó (sau 1 thời gian ngắn thôi), giá trị nhận được đúng bằng 2, và đó là 1 nghiệm của PT $f(x)=0$. Điều đó đã minh chứng cho việc làm tròn nghiệm mình đã nói trên, và quá trình giải trên thực ra là tính giới hạn.

Bây giờ thử lại với biểu thức trên lần nữa, với giá trị ban đầu $X=-10$, có phải máy lại hội tụ về -3 đúng không? Đó là nghiệm thứ 2 (và cũng hết nghiệm rồi).

Vừa rồi mình đã biểu diễn một cách rõ ràng cho các bạn thấy cách thức mà máy tính đã sử dụng để giải PT cho các bạn bấy lâu nay. ☺ Nhưng để mục này có tác dụng như đã nói, mình sẽ viết thêm vài điều hữu ích nữa về cách sử dụng cái sai số của máy tính, chứ cái trên chỉ là 1 bí mật nhỏ được bật mí cho biết, không dùng làm gì. ☺

Loại nghiệm mang sai số cao nhất chính là nghiệm của PT vô tỉ. Máy không thể hiển thị lại nghiệm chứa căn khi dùng Solve vì 2 lí do:

+ Thứ nhất hình thức phức tạp.

+ Thứ hai: sai số.

Thậm chí đôi khi PT có nghiệm nhưng máy không tìm được nghiệm của nó và báo "Can't Solve", hoặc không thể nào hội tụ được nghiệm chính xác hơn (sai số khá cao). Cụ thể lúc đó máy sẽ báo "Continue: [=]" (ý muốn hỏi bạn có tiếp tục giải để việc hội tụ lần nữa được chính xác hơn không), hoặc nếu không thì nó cũng sẽ cho giá trị "$L-R$" rất là "ngứa mắt".

Chẳng hạn máy hiển thị như hình này:

$$\begin{array}{|ll|}\hline Continue:[=] & \\ X= & 99,09375454 \\ L-R= & 102264320.3 \\ \hline\end{array}$$

($L-R$ tức là $Left-Right$: vế trái $-$ vế phải, từ nghiệm X đó).

Đó là những gì máy đáp lại khi ta cho giá trị ban đầu X = 0 để giải PT sau:

VD2. Giải PT $x^4+6x^3+2\sqrt{x^3-2x+2}=0$ (PT này mình bịa ra để làm VD đó mà! ☺).

Ở TH này nếu tiếp tục ấn [=], máy sẽ giải 1 lúc nữa… Và rồi kết quả hiển thị vẫn như cũ!

Nói cách khác, máy đã không thể hội tụ nghiệm từ X = 0, và giá trị X ở trên khiến cho $x^4+6x^3+2\sqrt{x^3-2x+2}\approx 102264320{,}3$ nên không thể nào chấp nhận nổi! ☹

Đứng trước hoàn cảnh này, cách tốt nhất là thay đổi giá trị ban đầu, cho X = 10 và thử lại.

Vâng, lần này máy cho $X\approx -0{,}881752245$ với $L-R=0$, đây chính là giá trị ta cần. ☺

Lưu ý cái $L-R$ nhé, hầu như ai cũng không để ý tới cả.

Có đôi khi $L-R$ không lớn như trên, ví như màn hình hiển thị như hình sau, mà sau khi sửa giá trị ban đầu, nó vẫn cho y hệt như thế…

< PT >
$X=\quad 4{,}738342233$
$L-R=10{,}632443\times 10^{-36}$

Vậy thì lúc này, các bạn đừng băn khoăn thêm nữa, lấy luôn cái $4{,}738342233$ làm nghiệm nhé!

Lí do là vì giá trị $L-R$ trên nhìn qua rất "hãi" ☺, nhưng thực ra nó là 1 số rất nhỏ, tức là $L-R\approx 0$, khi đó sai số của nghiệm càng nhỏ hơn, nói cách khác nó gần như là nghiệm đúng, vì lẽ đó, máy sẽ không có đề xuất "Continue: [=]" và cũng sẽ không thể hiển thị giá trị chính xác hơn được nữa, do đó các bạn cứ yên tâm sử dụng nghiệm như thường. ☺

Đó là cách mà chúng ta nhìn $L-R$ để xác định nghiệm có sai số như thế nào, có nên lấy hay không. Tuy nhiên đang còn một kiểu nữa, đó là nhìn ngay nghiệm để xác định nghiệm đúng mà không cần biết $L-R$ "muốn nói gì" với mình. ☺

Kiểu này chỉ xảy ra với nghiệm hữu tỉ mà thôi. Tức là khi máy hiện $X = 0,499999999$ thì ta biết ngay $x = \frac{1}{2}$! Kiểu nghiệm này rất ít gặp, và cũng rất dễ đoán, nhìn có vẻ lạ, nhưng không có nghĩa là máy không có khả năng hiện như thế mà không chịu làm tròn. Theo mình, lỗi này của máy có lẽ do nghiệm $X = \frac{1}{2}$ đã vi phạm điều kiện $f'(X) \neq 0$ khi sử dụng thuật toán lặp $X = X - \frac{f(X)}{f'(X)}$, cho nên máy buộc phải hiện giá trị xấp xỉ.

Vậy nếu máy hiện $X = 1,250000001$ thì nghĩa là thế nào? Đơn giản rồi, $X = 1,25 = \frac{5}{4}$

Nhìn cái nghiệm đáng sợ thế nhưng mà nó chỉ là loại "thùng rỗng kêu to" mà thôi! ☺

Nhớ nhé, sau khi nhìn X phải nhìn đến $L - R$, đừng có vội vàng mà "hốt"! ☺

Sự sai số trên không chỉ biểu hiện trong việc giải PT với Solve mà còn trong nhiều phép tính khác nhưng hiếm thấy hơn, riêng MODE EQN, trong lịch sử sử dụng máy tính của mình chỉ bắt gặp có 2 lần nó mắc lỗi này, do đó ta hoàn toàn yên tâm về chức năng này.

Dù sao bắt đầu từ đây, bẫy này không còn khiến các bạn lúng túng được nữa. ☺

Trên đây là những điều đơn giản nhưng còn mới lạ với khá nhiều người, tuy dài vậy nhưng vẫn chưa hết đâu, còn nhiều kĩ xảo cho các bạn học lắm! Mình sẽ "nhường đất" cho những kỹ thuật hay hơn vào 2 phần dưới đây để các bạn tiếp tục lĩnh hội… ☺

b) Nghiệm PT lượng giác

Như đã nói, nghiệm có dạng $x = a\pi + kb\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ và ta thường gặp trường hợp đơn giản nhất a là phân số và $\left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$, nhưng đó chỉ là dự đoán để mà tập trung vào giải quyết thôi. ☺

Như hướng dẫn ở mục 2, các bạn nên cho giá trị ban đầu X = 0 để giải, việc này càng quan trọng hơn với PT lượng giác vì có họ nghiệm, nghĩa là vô số nghiệm. Không tin các bạn có thể thử ngay với PT sinx = 1, dễ nhất đấy, con nít cũng làm được! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Ta biết rằng $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Nếu cho X = 0 thì máy cho các bạn nghiệm như thế nào? Có phải $X \approx 1,570796191$ không? Nghiệm khá xấu, và dầu thoát ra màn hình bình thường rồi nhấn $\boxed{RCL}\boxed{)}$ cũng không thể chuyển con số trên về $\frac{\pi}{2}$ được (đồng nghĩa với việc nhấn $\boxed{S \Leftrightarrow D}$ là vô ích). Lúc này, trong trường hợp máy cho số như vậy có một vài cách đơn giản sau có thể chuyển được nó về dạng đẹp:

+ Cách 1: đơn giản nhất mà ai cũng nghĩ ra được, đó là chia ngay cho π ! ☺

+ Cách 2: nhập vào biểu thức $\sin^{-1}(\sin(X))$ rồi ấn $\boxed{=}$ (sử dụng $\boxed{SHIFT}\boxed{\sin}$ để nhập $\sin^{-1}$, có thể thay sin bằng cos).

Bây giờ các bạn thử giải lại với giá trị ban đầu khá lớn xem sao, mà thôi, hơi lớn như $X = 15$ thôi cũng được, có phải nghiệm là $X \approx 14,13716706$ không? Vâng, dầu cho X lớn mấy thì máy cũng cho được nghiệm gần gần cái số đấy, miễn là nó thuộc họ $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ là được. Nghiệm trên ứng với k = mấy? Lấy X chia π thử xem?

Kết quả là 4,5 đúng không?

Với $\frac{\pi}{2} + k2\pi = 4,5\pi$ dễ dàng suy ra $k = 2 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$ là giá trị đúng trong X. ☺

Các bạn thấy cái bất lợi của việc cho giá trị ban đầu của X quá lớn hay quá nhỏ rồi chứ?

+ Thứ nhất: vì nghiệm là $x = a\pi + kb\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ nên khi cho X = 0 máy sẽ cho các bạn nghiệm đẹp nhất của họ, ứng với k = 0, tức là $X = a\pi$, còn X lớn hay nhỏ quá thì hầu như không có chuyện đó. Đấy là cách mà ta dò ra "phần chính" của nghiệm (theo cách gọi của mình đó mà ☺), đó là phần $a\pi$

+ Thứ hai: trường hợp sinx = 1 là đơn giản nhất đấy, chứ còn khi vào trận chiến rồi thì nhiều nghiệm ứng với $k \neq 0$ các bạn có chia π thế nào cũng không xác định được chính xác nghiệm như mình đã làm ở trên đâu! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Việc cho X = 0 khi giải PT lượng giác ở trên chỉ là nên chứ không có nghĩa sẽ luôn nhận được nghiệm đẹp nhất, chẳng hạn với PT cosx = 0, máy vẫn hiển thị $X = 199,4911335$ sau khoảng 10s tính toán. Bấm $\boxed{RCL}\boxed{)}$ ta được $X = \frac{127}{2}\pi$. Đây rõ ràng là 1 nghiệm không đẹp.

Khi gặp những trường hợp như vậy các bạn đừng chia π mà nên áp dụng cách thứ 2 trong số 2 cách xác định nghiệm đẹp đã nêu trên:

+ Nếu dùng sin: tính $\sin^{-1}(\sin(X))$ ta được $-\frac{1}{2}\pi$

+ Nếu dùng cos: $\cos^{-1}(\cos(X)) = \frac{1}{2}\pi$ (!???).

Tại sao lại có sự khác nhau đó?

Sự khác nhau này cho thấy $X = \frac{127}{2}\pi$ sẽ thuộc 1 trong 2 họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + kb_1\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{2} + kb_2\pi$. ☺ Điều đó khẳng định tiếp rằng các bạn nên dùng cả sin lẫn cos để thử.

Với những nghiệm xấu như vậy, sau khi xác định được phần chính $a\pi$ ta sẽ sử dụng luôn để tìm phần tuần hoàn $kb\pi$. Ở đây với $X = \frac{127}{2}\pi$ ta được $\left[\begin{array}{l} kb_1 = 63 \\ kb_2 = 64 \end{array}\right.$. Do k nguyên, nên ta sẽ xem xét b theo hướng từ nguyên đến không nguyên.

b nguyên thì chỉ có thể là $\left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 2 \end{array}\right.$, do đó ta có 3 TH (trường hợp): $\left[\begin{array}{l} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \\ b_2 = 2 \end{array}\right.$. Ta thấy 2 TH đầu thực ra là một, và TH3 thì bao trong 2 TH đầu rồi, vậy nên họ nghiệm đúng là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ☺

Nói tóm lại là các bạn thấy một việc tưởng như đơn giản như thế thực ra lại khá nhiều công đoạn lắt nhắt, nhưng nếu đã quen rồi thì việc thao tác 2 bước này chỉ mất tầm 2 phút (không kể thời gian máy giải!):

+ Đầu tiên chia nghiệm nhận được cho π hoặc tính $\left[\begin{array}{l}\sin^{-1}(\sin(X))\\ \cos^{-1}(\cos(X))\end{array}\right.$ để tìm phần chính.

+ Nếu nghiệm nhận được không phải $a\pi$, ta tính $kb = \frac{x}{\pi} - a$ rồi xét b từ 1; 2 đến các giá trị hữu tỉ hay gặp ($\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \ldots$). Trong các TH của b, loại những họ nghiệm trùng nhau hoặc bị bao trong 1 họ khác. Sau khi loại rồi, những TH còn lại lấy 2 giá trị k lớn và liên tiếp nhau thay vào PT để thử rồi kết luận.

Các bạn liệu có gì đó hơi băn khoăn khi đọc tóm tắt trên hay không?

Nếu theo dấu cộng thứ nhất, ta nên cho X = 0 để giải thì việc tìm $a\pi$ sẽ dễ dàng hơn hết.

Nhưng theo dấu cộng thứ 2, để tìm được b ta lại nên cho X lớn để nghiệm nhận được không phải là $a\pi$!

Trong hoàn cảnh này, cách tối ưu ai cũng nghĩ ra có vẻ là giải 2 lần (1 lần tìm $a\pi$, lần kia tìm b), nhưng thực ra mình vẫn khuyên các bạn nên gán X = 0. Lí do là vì…

Còn nữa!… ☺

c) Nghiệm PT vô tỉ

Vì nghiệm này chỉ ra dạng $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ nên ta sẽ đi theo hướng lật lại PT bậc 2 chứa nó sau đó sẽ sử dụng CT nghiệm để lấy được dạng đẹp của nó! Các bạn cứ yên tâm rằng đã là PT bậc 2 trong đề thi Quốc gia thì không có chuyện hệ số xấu đâu, và cũng chẳng to lắm, do đó mà cách này chắc chắn có hiệu quả. ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Để sử dụng được kỹ thuật này trước hết các bạn phải hiểu rõ về $\boxed{MODE}\boxed{7}$, tức chức năng TABLE. Cái này hầu hết mọi người không để ý tới, thế nhưng đã học thủ thuật CASIO thì không thể nào bỏ qua được một chức năng hữu ích như thế!

Mình luôn sử dụng chức năng này ở câu vẽ đồ thị hàm số, và mình khuyên các bạn nên biết dùng vì sau này ta sẽ áp dụng khá nhiều.

Đây là chức năng tính giá trị của biểu thức f(X) với các giá trị X chạy cách đều nhau trong 1 khoảng nào đó do người dùng tự quy định, nhớ rằng chỉ có biến X là máy chấp nhận. Cụ thể máy sẽ yêu cầu bạn phải xác định rõ các giá trị:

+ Bắt đầu (Start): giá trị mút đầu đoạn.

+ Kết thúc (End): giá trị mút cuối đoạn.

+ Bước nhảy (Step): chính là lượng cách nhau của mỗi giá trị X trong khoảng đó.

Các bạn tiếp tục xem các VD sau để hiểu rõ hơn nhé! ☺

VD1. Ta đặt giả thuyết rằng đang cần truy nghiệm $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ về dạng đẹp của nó.

Đây là 1 nghiệm rất quen thuộc. Các bạn hãy triệt dạng đẹp của nó bằng cách tính $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, ta thu được $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, sau đó tính $\sqrt{Ans}$ và lưu kết quả vào A, rõ ràng lúc này nghiệm ta lưu chỉ hiển thị được $1,618033989$ mà không phải là dạng đẹp ban đầu, và đó chính là nhiệm vụ của chúng ta: làm sao biết được dạng đẹp của nó nếu chẳng may lúc giải PT ta nhận được cái "số điện thoại" như vậy?

Đầu tiên mình ấn $\boxed{MODE}\boxed{7}$ sau đó nhập vào $f(X)=A^2+XA$.

Lí do nhập như vậy thì là do ta cần dò các hệ số của PT bậc 2 nào đó đang cần tìm mà có chứa nghiệm trên (lưu vào A), do đó mình mới cho X chạy vì nó chính là hệ số của PT: $A^2+XA+c=0$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Như đã nói, các hệ số PT trên sẽ là số hữu tỉ đẹp nên mình "không cần lo khi cho luôn hệ số đầu tiên bằng 1" ☺, chỉ cần dò các giá trị X trong 1 khoảng nhỏ nào đó để xem giá trị nào sẽ cho c đẹp, khi đó ta sẽ lấy.

Bây giờ ấn $\boxed{=}$, nhập vào giá trị $Start = -14$, lại $\boxed{=}$ và cho $End = 14$ (như vậy là dò trong đoạn $[-14;14]$), còn Step thì nó mặc định là 1, thôi cứ để 1 dò thử đã. ☺

Ấn $\boxed{=}$ lần cuối và ta nhận được 1 cái TABLE (bảng)…

Bây giờ dò nào, ta có $f(X) = A^2 + XA = -c$ nên ta cần tìm 1 giá trị hữu tỉ bên cột f(X)…

Vâng, đoạn đầu rất là nản, nhưng mà, ồ, đã có 1 giá trị đẹp. Phải, đó chính là $f(-1) = 1$ ☺, thay vào $f(X) = A^2 + XA$ ta được $A^2 + (-1)A = 1 \Leftrightarrow A^2 - A - 1 = 0$, đấy chính là PT cần tìm.

Đến đây giải PT $A^2 - A - 1 = 0$ dễ dàng truy ra được giá trị đẹp trong A là $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ☺

Các bạn đã hiểu nguyên tắc rồi chứ? Tiếp tục nhé!

VD2. Tương tự VD1 các bạn hãy phá dạng đẹp của nghiệm $x = \dfrac{2-\sqrt{6}}{4}$ rồi lưu nó vào A và thao tác thử nào! ☺

Đầu tiên vào $\boxed{MODE}\boxed{7}$, nhập $f(X) = A^2 + XA$

$\boxed{=}$ 1 phát, cho ngay $Start = -14$, lại $\boxed{=}$ phát nữa, cho luôn $End = 14$ luôn cho đầu mông đối xứng! ☺ Còn Step = 1 thì cứ để nguyên đó thường sẽ không phải thay đổi đâu.

Pằng phát cuối! Xem bảng và dò f(X) nào…

Đoạn này nhìn kĩ nhé các bạn, nếu không bỏ qua mất $f(1) = 0,125$ thì tiếc lắm đó! ☺ Số hữu tỉ đẹp mà.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Vậy ta được $A^2 + A = \frac{1}{8} \Leftrightarrow A^2 + A - \frac{1}{8} = 0$, từ đó dễ dàng truy lại được $A = x = \frac{2-\sqrt{6}}{4}$

VD3. Hãy thử với nghiệm $x = \frac{3-\sqrt{6}}{4}$ để thấy sự khác biệt! ☺

Tự làm nhé, kết quả thế nào các bạn?… ☺

Phải chăng các bạn không tìm được kết quả với khoảng $[-14;14]$ và Step = 1?

Vậy mà mình vẫn có kết quả nè!!! Đó là: không tìm được giá trị f(X) hữu tỉ nào! ☺

Đấy đúng là 1 kết quả tồi tệ của kỹ thuật này rồi còn gì. Vậy chẳng phải kỹ thuật này đã thất bại?

Không đâu, hãy linh hoạt lên một chút nhé, hãy nhìn lại biểu thức chúng ta đã nhập: $f(X) = A^2 + XA$, nếu trước đó các bạn vẫn thấy băn khoăn khi mình nói câu "cho ngay hệ số đầu tiên là 1" thì các bạn đã thắc mắc đúng rồi đó. ☺ Đấy chính là nguyên nhân gây ra việc không có f(X) nào hữu tỉ ở đây!

Vậy nên mình sẽ sửa thành $f(X) = 2A^2 + XA$, lần này thì ta có $f(-3) = -0,375 = -\frac{3}{8}$

Ok rồi chứ các bạn, chỉ cần để ý cái công thức nghiệm của PT bậc 2 là ta sẽ hiểu được đầy đủ lí do sự cố của VD3 này. Cái đó quá dễ thế nên mình không nói gì thêm nữa! ☺

Có lẽ chỉ cần 3 VD là các bạn đã rõ cách làm lắm rồi, còn nếu ai mà… kém quá ấy ☺, thì ít ra cũng dễ dàng bịa ra được hàng đống VD để mà thao tác cho quen tay, trăm hay không bằng tay quen mà! ☺

Đến đây, nếu chịu khó suy nghĩ 1 chút các bạn có thể dễ dàng nhận ra rằng ta không nhất thiết cứ phải dùng biểu thức $f(X) = A^2 + XA$, mà có thể "đổi gió" thành: $f(X) = -\frac{A^2 + X}{A}$

Các bạn có hiểu không?

Lúc nãy ta dò b để tìm $c = -f(X)$, còn bây giờ ta lại dò c để tìm $b = f(X)$, vì PT bậc 2 lúc này là $A^2 + bA + X = 0$. Đơn giản thế thôi, chỉ cần các bạn đừng lẫn lộn b, c (X và f(X)) nếu thích "đổi gió" là được! ☺

Chắc chỉ cần viết thêm vài dòng tóm tắt nữa là xong rồi:

+ Thứ nhất nghiệm máy giải nó lưu vào X thì các bạn phải chuyển nó sang biến khác (thường chọn A) vì biến X là ta để dò trong TABLE.

+ Thứ 2 các bạn nên dùng khoảng chạy $[-14;14]$ và Step = 1 vì tỉ lệ thành công là 100%. Ở VD3 trên, chắc chắn nhiều bạn đã nghĩ đến việc thay đổi khoảng chạy này khi thấy không có f(X) nào hữu tỉ, nhưng thực ra đâu phải thế, chúng ta chỉ cần nâng dần hệ số đầu của f(X) lên (2; 3;…), nhất định sẽ ra thôi. ☺

Mình muốn lưu ý thêm 1 TH nữa, đây là TH hi hữu của nghiệm PT vô tỉ, đó là nó có dạng lượng giác. Nếu chẳng may câu PT thuộc mức khó sau câu BĐT trong đề thi, mà sau khi làm như trên các bạn không tìm được dạng $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, thì hãy nên nghi đến dạng lượng giác.

Khi đó ta thử dạng lượng giác bằng cách lưu nghiệm vào A (B, C,…), rồi tính 3 giá trị $\sin^{-1}(A); \cos^{-1}(A); \tan^{-1}(A)$ (-1 ở đây không phải mũ mà ý là hàm lượng giác ngược arc).

Vì nghiệm lượng giác có dạng $x = a\sin\varphi$, nên may ra ta tìm được φ

Còn nếu vẫn không làm rõ được "chân tướng" của nó, thì "đành thôi quên lãng CASIO", thử lượng giác hóa mà giải tay bo thôi. ☺

Hãy tiếp tục đọc để biết được rằng, kỹ thuật của mục này chưa kết thúc… ☺

2. <u>Tìm nghiệm phương trình chứa tham số m</u>

Cái này thường dùng cho câu hỏi phụ phần khảo sát hàm số. Chẳng hạn chúng ta có 1 câu như sau:

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

VD1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + 2(m-1)x^2 + (1-5m)x + 2(m-1)$ (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Đối với loại này, có đến 99% PT f(x) = 0 sẽ có 1 nghiệm hữu tỉ (không chứa tham số), còn nếu không có nghiệm hữu tỉ thì chắc chắn hướng sử dụng nghiệm này của ta là không đúng, nói cách khác, khi đó các bạn phải dùng Viet. ☺

Trước hết ta nhập f(X) vào máy: $X^3 + 2(M-1)X^2 + (1-5M)X + 2(M-1)$

Bấm $\boxed{SHIFT}\boxed{CALC}$ cho máy giải nghiệm với M = 0 (gán thế cho đơn giản) ta được X = 2. Ta kiểm tra lại bằng cách bấm $\boxed{CALC}$ rồi thay đổi M bất kì, giữ nguyên X = 2, để tính biểu thức. Ta thấy rằng $f(2) = 0 \forall M$, vậy phương trình f(x) = 0 có nghiệm x = 2

Từ đó ta phân tích được: $f(x) = (x-2)(x^2 + 2mx + 1 - m)$ ☺

Các bạn chỉ cần lưu ý rằng nghiệm phải hữu tỉ là được.

Ứng dụng phương pháp trên, các bạn thử tìm nghiệm bài sau xem thế nào:

VD2. $y = f(x) = x^3 - (m^2 - 2m - 1)x - 2m + 2$

Với M = 0 máy giải được $X = -1$, khi đó $f(-1) = m^2 - 4m$, không thỏa mãn vì nó vẫn phụ thuộc vào m.

Tiếp tục với M = 0, máy vẫn chỉ cho $X = -1$, như vậy xem ra f(x) = 0 không có nghiệm cố định, bài toán không thể đi theo hướng này.

Nhưng thật ra đáp số lại chính là: $x = m - 1$ (không tin cứ thử lại! ☺).

Vậy làm sao để tìm được nghiệm chứa tham số của PT bằng MTBT?

Ta làm như sau: thay vì cho X = 0, ta cho M = 1000 (!) và giải.

Vì M khá lớn, nên chắc X cũng lớn, do đó ta cho giá trị ban đầu X = 1000 luôn!

Kết quả ta được X = 999

Do M = 1000 nên trả lại vào X ta được $X = 999 = M - 1$, từ đó dự đoán $x = m - 1$

Thử lại với các cặp giá trị $(X;M) = (\pi - 1;\pi);(e - 1;e)$ (để nhập số e các bạn nhấn $\boxed{ALPHA}$ và $\boxed{\times 10^x}$ (bên trái nút $\boxed{Ans}$)) ta thấy kết quả là 0, do đó nghiệm là $x = m - 1$

Vậy $f(x) = (x - m + 1)[x^2 + (m-1)x + 2]$

Mặc dù loại nghiệm này hiếm gặp, song ta cũng phải biết đối phó với nó nếu chẳng may xơi phải. ☺

Như vậy nếu ngay từ đầu không chắc PT có nghiệm cố định hay nghiệm chứa tham số thì các bạn cứ gán $M = 1000$ (đồng thời cũng phải chọn X lớn lớn nếu không máy khó giải):

+ Nếu máy cho giá trị X hữu tỉ và $|X| \le 5$ (đề thi THPT Quốc gia chỉ có đến thế là cùng, không thì $|X| \le 10$) thì đến 99% nó là nghiệm cố định cần tìm.

+ Còn nếu $|X| \ge 100$ và hữu tỉ thì thì ta phân tích nó thành x = am + b ($|a| \le 5; |b| \le 5$), đó chính là nghiệm chứa tham số của PT.

Trường hợp nào cũng phân tích được, trừ phi X vô tỉ. ☺

Đặc biệt khi PT có bậc 2; 3 thì ta cho M = 1000 rồi dùng MODE EQN để giải, sẽ nhanh hơn rất nhiều.

Có lẽ các bạn còn thắc mắc lí do tại sao mình lại chọn 2 cặp $(\pi - 1;\pi);(e - 1;e)$ để thử kết quả mà không phải số khác? Thì thực ra nó là "nguyên tắc TGTTN"mà mình đã hướng dẫn từ lâu rồi đấy thôi. ☺

Hãy luôn nhớ đến "nguyên tắc TGTTN" nhé!

Phương pháp gán 1000 trên các bạn cần nắm kĩ vì sẽ có khá nhiều trường hợp ta phải sử dụng đến nó. Hãy thử 1 VD cuối cùng để xem bạn đã nắm kĩ chưa nhé! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

VD3. Giải PT $f(x)=2x^4-(m+7)x^3-(m^2-m-4)x^2+(m+7)x+m^2-m-6=0$

Dài, sợ thật! Quả thực cái này mà không có máy tính thì cũng nhọc lắm đây! ☺

Gán M = 1000 đồng thời cho X = 1000 ta được nghiệm: X = 1002 = M + 2

Tối ưu hóa việc giải PT: $\dfrac{2X^4-(M+7)X^3-(M^2-M-4)X^2+(M+7)X+M^2-M-6}{(X-M-2)}$

Giải biểu thức này, ta lại được 1 nghiệm nữa: X = 1, ồ rất là bất ngờ! ☺

Tiếp tục tối ưu hóa: $\dfrac{2X^4-(M+7)X^3-(M^2-M-4)X^2+(M+7)X+M^2-M-6}{(X-M-2)(X-1)}$

Và ta được tiếp $X=-1$. Vậy rõ ràng PT đã có 1 nhân tử bậc 2: (X^2-1)

Nếu tiếp tục với $\dfrac{2X^4-(M+7)X^3-(M^2-M-4)X^2+(M+7)X+M^2-M-6}{(X-M-2)(X-1)(X+1)}$, các bạn sẽ thu được 1 số khiến ta mất hứng: $X=-498,5$

Nó ám ảnh ta chỉ tại cái hình thức bề ngoài có vẻ "không hợp lệ" cho lắm, nhưng khi ta ấn $\boxed{RCL}\boxed{)}$ thì chân tướng của nó hiện ra lại rất đẹp: $X=-\dfrac{997}{2}=-\dfrac{M-3}{2}$ (dễ hiểu thôi vì hệ số đầu tiên của PT là 2 mà). ☺

Vậy nói chung $f(x)=(x-m-2)(2x+m-3)(x^2-1)$, mà thôi không cần, chỉ cần biết PT có 4 nghiệm như thế là okay rồi, có thể rời khỏi đây! ☺

À mà khoan đã, nói chút về cái tối ưu hóa, ở phần **I. Kỹ thuật đơn giản…** rõ ràng trước khi sửa biểu thức thành $\dfrac{2X^4-(M+7)X^3-(M^2-M-4)X^2+(M+7)X+M^2-M-6}{(X-M-2)}$ để tối ưu hóa, ta phải lưu nghiệm đó vào A, B,… gì đó, nhưng với nghiệm hữu tỉ thì không cần nhé, làm như mình vừa làm trên mới đẩy nhanh được tốc độ. Đó là điều mà bất cứ ai chỉ cần động não tí xíu là ra ngay! ☺

Các bạn sẽ được luyện tập lại mục này một lần nữa đấy!… ☺

3. Khai triển đa thức nguyên

Đấy chính là đa thức hệ số nguyên và ta sẽ khai triển nó ra dạng chính tắc, là dạng sau:

$f_n(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + ... + a_nx + a_{n+1}$

Nếu đa thức có chứa tham số thì tham số sẽ nằm trong các hệ số a_i $(i = \overrightarrow{1;n+1})$.

Đây chính là 1 trong số những kỹ thuật đầu tiên của bạn Bùi Thế Việt đã cho mình thấy những "sức mạnh bí ẩn" của máy tính CASIO trong Toán học, và nó đã kéo mình vào niềm đam mê nghiên cứu các thủ thuật máy tính CASIO.

Còn đối với các bạn, hi vọng các bạn đã đam mê nó ngay từ những dòng đầu tiên của cuốn sách. ☺

Chúng ta cùng bắt đầu thôi nào!

a) Đa thức không chứa tham số

Các bạn có thể khai triển đa thức $f(x) = (x-3)^3 + (1-4x)(2x-7)^2$ dễ dàng về mặt toán học, nhưng lại không dễ dàng về mặt thời gian nếu các bạn chỉ có 1 phút. Do đó kỹ thuật khai triển trên máy tính là một "đột phá", nó sẽ không làm các bạn "suy giảm trí tuệ" bởi vì đây chỉ là việc cỏn con mà thôi, nhưng lại cần phải làm nhanh chóng. ☺

Hãy xem f(x) ở trên được máy tính khai triển nhanh đến mức nào nhé:

VD1. Khai triển $f(x) = (x-3)^3 + (1-4x)(2x-7)^2$

Trước hết nhập f(X) vào máy và dùng CALC tính f(1000), ta được kết quả:

$K_1 = -1,489319698 \times 10^{10}$

Dễ thấy f(x) có bậc 3, nên ta xấp xỉ: $K_1 = -14,89319698 \times 10^9 \approx -15 \times 10^9 = -15X^3$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Do đó quay lại f(x), sửa thành: $(X-3)^3+(1-4X)(2X-7)^2+15X^3$, ấn $\boxed{=}$ thu được $K_2=106803022\approx 107X^2$

Lại sửa thành: $(X-3)^3+(1-4X)(2X-7)^2+15X^3-107X^2$, ta được: $K_3=-196978\approx -197X$

Cuối cùng $(X-3)^3+(1-4X)(2X-7)^2+15X^3-107X^2+197X$ cho ta $K_4=22$, nên $(X-3)^3+(1-4X)(2X-7)^2+15X^3-107X^2+197X-22=0$, hay: $(X-3)^3+(1-4X)(2X-7)^2=-15X^3+107X^2-197X+22$

Nhờ có "nguyên tắc TGTTN" mà kết quả trên được xác nhận là đúng.

Các bạn thấy rồi đó, khá là nhanh chóng trong một bài thi Đại học vì chỉ cần bấm máy rồi ghi kết quả dần dần, không đụng tí giấy nháp nào cả.

Sau này mình sẽ gọi đây là phương pháp "xấp xỉ" nhé! ☺

VD2. Đa thức $f(x)=(x+2)^3+(x^2-1)(x^2+3x+2)$

Với $\boxed{CALC}$ ta được $f(1000)=K_1=1,004007009\times 10^{12}$

Liếc mắt phát thấy ngay f(x) bậc 4, dễ quá: $K_1\approx 1\times 10^{12}=X^4$ (nhớ là X = 1000 nhé!). Nếu ai mà đã quen việc này, thì từ $10^{12}=X^4$ là đã làm được rồi không cần nhìn lại bậc. ☺

Bớt đi X^4 ta được 1 biểu thức bậc 3 mới: $(X+2)^3+(X^2-1)(X^2+3X+2)-X^4$

Nhớ rằng đừng thay đổi X nhé, ta thu được kết quả mới: $K_2=4007009006$

Mẹo nhỏ nè, khi kết quả đẹp như thế này rồi, các bạn chỉ cần phân chia theo nhóm 3 chữ số một từ phải sang trái là dễ dàng xấp xỉ ngay: $K_2=4'007'009'006\approx 4\times 10^3=4X^3$ (việc phân chia 3 chữ số chắc tại vì X = 1000 có 3 chữ số 0, phải không nào?).

Tiếp tục bớt $4X^3$ và nhấn $\boxed{=}$, thì biểu thức $(X+2)^3+(X^2-1)(X^2+3X+2)-X^4-4X^3$ cho ta $K_3=7009006$

Nếu đã "lão luyện" ☺ thì nhìn qua ngay cái số này đã biết là $K_3=7X^2+9X+6$ rồi chứ chả cần phải xấp xỉ làm gì nữa, thậm chí biết được kết quả sớm hơn từ K_2 rồi kia. ☺

Các bạn hiểu rồi chứ?

Vậy: $f(x)=x^4+4x^3+7x^2+9x+6$ ☺

Đặt vấn đề: nếu chẳng may cần khai triển đa thức mà hệ số là phân số tối giản thì sao? Chẳng hạn như đa thức: $f(x)=\left(\frac{x^2}{2}+2x-1\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$???

Khi đó mà xác định hệ số y nguyên như cách trên coi như toi rồi!

Nhưng vì chúng ta không thể nào "toi" chỉ vì vấn đề "bé cỏn con" này được, do đó cách đơn giản chính là: viết lại $f(x)=\frac{(x^2+4x-2)(3x+1)^2}{18}$

Như vậy xem như đã xong, khai triển đa thức nguyên trên tử rồi đem kết quả chia cho 18 là ok! ☺

Một chú ý rất là hữu hiệu về mặt lí thuyết cho kĩ xảo này là với bậc 5 trở lên mà trị tuyệt đối của hệ số cao gần 100 (thậm chí cao hơn như hệ số 107 ở VD1 đấy), thì kĩ xảo này bắt đầu thành "quỷ xạo" rồi ☺, nghĩa là kết quả bắt đầu bị sai! Bậc càng cao, hệ số càng to thì cái sai càng tăng, và tăng rất nhanh bắt đầu từ bậc 5 trở lên, chủ yếu là tại bậc.

Do đó bậc 5 các bạn không nên sử dụng, và chỉ tiếp tục tính toán nếu thấy những hệ số đầu tiên thu được là nhỏ mà thôi (nói chung là chúng ta vẫn thu những hệ số nhỏ làm kết quả được). Còn bậc 6 thì thôi hẳn! ☺

Mình sáng tạo được thêm 6 cách nữa cho việc khai triển đa thức không có tham số này, trong đó có cách hữu hiệu đến tận bậc 10, nhưng vì các bạn sẽ không gặp loại đa thức như

vậy, nên thôi không viết thêm nữa. Cũng là do công việc này không phải là quan trọng trong đề thi. ☺

Sở dĩ mình nói "về mặt lí thuyết" là vì trong đề thi THPT QG cực hiếm gặp đa thức bậc 5 trở lên, nếu chẳng may các bạn có gặp thì hầu như tại phương pháp các bạn sử dụng không đúng mà thôi, tiêu biểu trong số đó là bình phương lên mấy lần, ặc ặc! ☹

b) Đa thức chứa tham số

VD1. Ta xét đa thức $f(x)=(x-2)(x^2+2mx+1-m)$ cần khai triển ra dạng chính tắc.

Dễ thấy m có bậc 1 (hãy xem m là 1 biến như x và các bạn sẽ nhanh chóng nhìn thấy bậc của nó như đã làm với x), nên ta sẽ tìm cách khai triển nó ra dạng sau: $f(x)=g(x)+mh(x)$, rồi nhóm lại theo bậc của x.

Những bạn đã học số phức có thấy dạng này khá quen thuộc không? Z = a + bi? Từ ý tưởng áp dụng z = a + bi đó mà cách làm sau được mình sử dụng:

Trước hết vào MODE CMPLX ($\boxed{MODE}\,\boxed{2}$, dành cho toán số phức), dùng i (đơn vị ảo) thay thế cho m ta được đa thức: $f(X)=(X-2)(X^2+2iX+1-i)$

(Khi vào MODE này, để nhập đơn vị ảo i, ta nhấn $\boxed{ENG}$).

Sử dụng $\boxed{CALC}$ tính f(1000) ta được kết quả $K_1=998000998+1995002i$, cái này thì sao? Ồ! Nó chính là vấn đề mà mục **a** đã giải quyết: phương pháp xấp xỉ! ☺

Ta có $K_1='998'000'998+1'995'002i'\approx X^3+2X^2i$

Do đó $f(X)-X^3-(2X^2)i=-1'999'002-4'998i\approx-2X^2-5Xi$

$\Rightarrow f(X)-X^3+2X^2-(2X^2-5X)i=998+2i\approx X+2i$

Cuối cùng $f(X)-X^3+2X^2-X-(2X^2-5X+2)i=-2$

Vậy $f(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2 + (2X^2 - 5X + 2)i = X^3 + 2(i-2)X^2 + (1-5i)X + 2(i-1)$

Đổi lại i = m: $f(x) = x^3 + 2(m-1)x^2 + (1-5m)x + 2(m-1)$

Đây là f(x) có bậc 3 (cần nhớ đó là bậc của x nhé) và vẫn đang còn đơn giản đấy, bậc cao hơn hay biểu thức phức tạp hơn lúc ấy các bạn sẽ thấy được phương pháp máy tính này hữu hiệu đến mức nào.

Có 1 lưu ý là các bạn có thể tìm phần g(x) trước rồi đến h(x) chứ không nhất thiết phải làm đồng thời như mình vừa làm, mình làm thế chẳng qua để đỡ tốn giấy mà thôi. ☺

Khi làm vậy ta vẫn xấp xỉ như bình thường có điều chỉ làm cho mỗi phần số 998000998 còn phần $1995002i$ cứ mặc kệ nó, nó không thay đổi gì. Tác dụng duy nhất và cũng quan trọng nhất chính là tránh được sai sót khi làm đồng thời.

VD2. Hãy thử sức khai triển đa thức $f(x) = (x^2 - mx + 2m)(2x^2 + 3)$ ☺

Bậc của m là mấy? Có phải bậc 1 không?

$\boxed{MODE}\ \boxed{2}$ và nhập vào biểu thức: $(X^2 - iX + 2i)(2X^2 + 3)$ (lưu ý nhá: ở VD1 mình có ghi thêm "f(X) =" thì đó chỉ là đặt tên cho biểu thức để dễ gọi mà thôi, không phải là các bạn cũng nhập vào máy là "f(X) =" đâu ☺).

Với X = 1000, ta được số phức $K_1 = 2{,}000003 \times 10^{12} - 1996002994i$. Nếu các bạn thành thạo phương pháp xấp xỉ rồi thì dễ dàng nhận thấy bài này dễ hơn bài trước rất nhiều, vì kết quả có nhiều số 0 và số 9. ☺

Cái 10^{12} lại là 1 cái dễ nữa vì nó giúp bạn xác định được bậc cao nhất của x thông qua việc X = 1000, nhưng ở đây thì không cần, rõ ràng ta đã biết đây là đa thức bậc 4.

Tiến hành xấp xỉ nào:

$$K_1 = 2{,}000003 \times 10^{12} - 1'996'002'994i \approx 2 \times 10^{12} - 2 \times 10^9 i = 2X^4 - 2X^3 i$$

Bớt đi, và tính biểu thức mới: $(X^2 - iX + 2i)(2X^2 + 3) - 2X^4 - (-2X^3)i$, ta được:

$K_2 = 3'000'000 + 3'997'006i \approx 3X^2 + 4X^2 i$, quá đẹp! ☺

Tiếp tục với $(X^2 - iX + 2i)(2X^2 + 3) - 2X^4 - 3X^2 - (-2X^3 + 4X^2)i$:

$K_3 = -2994i = (-3X + 6)i$

Vậy: $(X^2 - iX + 2i)(2X^2 + 3) = 2X^4 + 3X^2 + (-2X^3 + 4X^2 - 3X + 6)i$

Hay: $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + m(-2x^3 + 4x^2 - 3x + 6) = 2x^4 - 2mx^3 + (4m + 3)x^2 - 3mx + 6m$

Lưu ý rằng cách trên chỉ áp dụng với m có bậc 1 mà thôi, do đó một câu hỏi đương nhiên sẽ nảy sinh…

Đó là: đa thức sau sẽ khai triển như thế nào?

VD3. Khai triển $f(x) = (x - m + 1)[x^2 + (m - 1)x + 2]$

Rõ ràng m có bậc 2 và ta không dùng được cách cũ vì $i^2 = -1$, nghĩa là nếu dùng i thay cho m thì sẽ làm mất m^2 trong khai triển, dẫn đến sai kết quả. Khó nhỉ! ☺

Đứng trước tình huống này, mình đã phải xem lại phần giải PT số phức ở mãi sau, rồi quay lại và thử áp dụng cách khai triển khó khăn đó vào bài này xem sao.

Đây là một cách khá là là khó khăn, vì nó đòi hỏi đầu óc ta phải đoán mò nhiều hơn, còn đoán có cơ sở rõ ràng thì ít. ☹

Nhập biểu thức trên vào máy ở MODE COMP (sử dụng biến X và M), rồi cho X = 100, M = 10000

Để hỗ trợ được tốt hơn, mình sẽ nhìn ngay hệ số của x^3 để khử luôn, điều đó ai cũng thấy ngay. Tức là ta sẽ nhập luôn vào máy như này: $(X - M + 1)(X^2 + (M - 1)X + 2) - X^3$

Kết quả nhận được là: -9998019898

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Khó khăn chính là đây, ta phải xấp xỉ con số "ít ỏi" này thành 1 hạng tử của X, M. Trong đó chắc chắn X chỉ có bậc cao nhất là 2 mà thôi, vì ta đã khử bậc 3 đứng đầu rồi.

Nếu vậy, chỉ có thể là: $-9998019898 \approx -10^{10} = -M^2X$ mà thôi! ☺

Do đó, sửa lại biểu thức: $(X-M+1)(X^2+(M-1)X+2)-X^3+M^2X$

Ta nhận được 1 số khá "xấu": $1980102 \approx 2\times 10^6$

Suy đoán tương tự như trên, ta viết được $2\times 10^6 = 2MX$

Tiếp tục sửa đổi: $(X-M+1)(X^2+(M-1)X+2)-X^3+M^2X-2MX$

Kết quả đang từ từ giảm dần: $-19898 \approx -2\times 10^4$

Cái này thì chọn $-2X^2$ hay $-2M$ là phù hợp đây? Bằng kinh nghiệm của mình, mình đoán là $-2X^2$! ☺ Không sao, cứ thử đã.

Biểu thức $(X-M+1)(X^2+(M-1)X+2)-X^3+M^2X-2MX+2X^2$ cho ta đáp số: $102 = X+2$

Vậy có nghĩa là: $(X-M+1)(X^2+(M-1)X+2)-X^3+M^2X-2MX+2X^2-X-2=0$

Sử dụng "nguyên tắc TGTTN" cho thấy biểu thức trên thay đổi vèo vèo khi X, M thay đổi, như vậy kinh nghiệm của mình đã không chính xác! ☹

Nhưng không sao, thử mà, ta thay cái $+2X^2$ thành $+2M$ là okay liền chứ gì!

Lần này thì $(X-M+1)(X^2+(M-1)X+2)-X^3+M^2X-2MX+2M-X-2=0$ chính xác với mọi X, M

Vậy: $(x-m+1)[x^2+(m-1)x+2] = x^3-(m^2-2m-1)x-2m+2$ ☺

Nói tóm lại, phương pháp xấp xỉ vẫn khá là pro ☺ với những người chịu khó tư duy! Tuy rằng vì là xấp xỉ nên dễ nhầm lẫn, và bậc áp dụng cũng không được quá cao, nhưng đủ để các bạn giải đề thi Quốc gia một cách ngon ơ rồi!

Xấp xỉ 2 biến như trên là 1 kiểu xấp xỉ khó, do đó, chúng ta nên làm thêm 1 VD nữa.

VD4. Đa thức $f(x)=(mx^2+1)(x^2-2x+m^2-3)$

Nhìn qua thấy hạng tử bậc cao nhất là mx^4, và thấp nhất là m^2-3 rồi, nên đâm ra lại quá dễ.

Với X = 100; M = 10000 thì biểu thức $(MX^2+1)(X^2-2X+M^2-3)-MX^4-M^2+3$ cho kết quả: $9,9999797\times10^{15}\approx10^{16}$

Hạng tử cần xấp xỉ thành chỉ chứa X với bậc tối đa là 3 mà thôi, vì hạng tử bậc 4 đã bị triệt tiêu rồi, M cũng tương tự như thế, do đó nếu chọn $10^{16}=M^4$ là hoàn toàn sai. Hơn nữa ta đang xấp xỉ từ cao xuống thấp nên phải ưu tiên cho bậc của X trước.

Vậy ta có thể xấp xỉ: $10^{16}=M^3X^2$

Từ đó, biểu thức mới $(MX^2+1)(X^2-2X+M^2-3)-MX^4-M^2+3-M^3X^2$ sẽ cho kết quả tiếp theo: $-2,02999903\times10^{10}\approx-2\times10^{10}$

Kết quả này thì có thể là $\left[\begin{array}{l}-2M^2X\\-2MX^3\end{array}\right.$, nhưng khả năng chính xác cao thì thuộc về cái dưới.

Quả vậy, kết quả của $(MX^2+1)(X^2-2X+M^2-3)-MX^4-M^2+3-M^3X^2+2MX^3$ đã giảm đi khá nhiều, nghĩa là khả năng đúng dâng lên: $-299990300\approx-3\times10^8=\left[\begin{array}{l}-3MX^2\\-3M^2\end{array}\right.$

Vừa rồi chúng ta đã phải đoán mò, cho nên gặp thêm lần này nữa thấy không được vui cho lắm! ☹ Tuy nhiên, chỗ này sẽ không hẳn là đoán bởi vì nếu chọn $-3M^2$ thì nó là hạng tử

tự do, trong khi đó hạng tử tự do ta đã xác định được ngay từ đầu là M^2-3 rồi, do đó phải chọn $-3MX^2$

Sửa lần cuối, kết quả nhận được là: $9700\approx 10000=X^2$

Và sau cùng: $-300=-3X$

Vậy ta được:

$$(MX^2+1)(X^2-2X+M^2-3)-MX^4-M^2+3-M^3X^2+2MX^3+3MX^2-X^2+3X=0$$

Chà! Xem ra mình đã khai triển sai rồi, "nguyên tắc TGTTN" cho biết. ☺

Nhưng hãy khoan cuống lên mà sửa đổi lung tung, các bạn có để ý thấy là khi ta dùng "nguyên tắc TGTTN" để thử lại biểu thức trên thì kết quả nhận được luôn chính là giá trị X gán vào hay không? Nói cách khác, điều đó có nghĩa là:

$$(MX^2+1)(X^2-2X+M^2-3)-MX^4-M^2+3-M^3X^2+2MX^3+3MX^2-X^2+3X=X$$

Vậy kết quả của ta là: $f(x)=mx^4-2mx^3+(m^3-3m+1)x^2-2x+m^2-3$

Đấy gọi là sự linh hoạt để tìm ra cái đúng ẩn trong cái sai! ☺

Hiện tượng "trùng nghiệm" ở trên là 1 hiện tượng hiếm gặp khi ta sử dụng xấp xỉ để khai triển đa thức, và nó là nguyên nhân dẫn đến bị sai như trên. Vì chẳng may cặp giá trị $(X;M)=(100;10000)$ lại trùng với 1 cặp nghiệm của đa thức sai, dẫn đến nó làm cho đa thức đó bằng 0 tại cặp giá trị này, và khiến ta tưởng là khai triển như vậy là đúng rồi.

Gặp tình huống như vậy các bạn đừng vội quay lại xem mình đã xấp xỉ sai từ bước nào, mà hãy quan sát kết quả nhận được từ "nguyên tắc TGTTN", để xem có tìm được được biểu thức liên hệ nào giữa những kết quả này hay không, từ đó bổ sung luôn nó vào, không cần sửa đổi gì đằng trước. Quay lại sửa sẽ gây rối rắm công việc ngay lập tức, và mất thời gian là cái chắc! ☺

Kết thúc mục này, mình cũng muốn nói rằng mình đã sáng tạo được 1 cách khác để xử nhưng đa thức mà bậc của m cao hơn 1, phức tạp hơn. Nhưng cách đó khá rối rắm, và đề thi cũng không yêu cầu cao cái đó, nên mình sẽ không viết thêm nữa. ☺

4. Phân tích phương trình

Thực chất mình đã từng đặt mục này là mục 5, nhưng thiết nghĩ việc phân tích đa thức nguyên thành nhân tử cũng thuộc nội dung này nên mình đã "cắt khẩu phần" mục 4 của riêng nó đi và "di nhập" nó vào trong này cho các bạn đỡ bị phân tán! ☺

a) Phương trình lượng giác

Thứ nhất mục này sẽ giải thích cho các bạn lí do mình viết "Còn nữa" ở mục **1**b). Mục ấy đã hướng dẫn các bạn cách xác định (họ) nghiệm đẹp của PT lượng giác. ☺

Kết thúc mục đấy mình đã khuyên các bạn khi giải PT lượng giác nên cho X = 0 mà không phải 1 số lớn, dù số đó cũng có tác dụng trong việc xác định chính xác họ nghiệm, lí do là vì: không cần thiết.

Bởi vì không có nghĩa là việc phân tích PT lượng giác trong mục này sẽ nhất thiết phải tìm bằng được họ nghiệm rồi mới tìm được nhân tử để mà phân tích. Mà chúng ta chỉ cần tìm được phần chính $a\pi$ của nghiệm là chuyển sang bước tìm nhân tử được rồi, tìm thêm phần tuần hoàn $kb\pi$ chỉ tổ làm phí công mà thôi. Chẳng qua vì mục **1**b) đó có tên là xác định nghiệm đẹp nên mình mới phải làm thế. ☺

VD1 (A - 2014). $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$

VD2 (A - 2013). $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Giải nào! ☺

VD1.

Bước 1: tìm nghiệm.

Nhập PT vào máy: $\sin(X)+4\cos(X)-2-\sin(2X)$

Gán X = 0 cho máy giải, ta được $X=\frac{\pi}{3}$

Bây giờ quay lại PT, cho giá trị ban đầu $X=-X$ (giá trị đối của X trước đó), ta được tiếp $X=-\frac{\pi}{3}$. Đây gọi là: thử theo kinh nghiệm. ☺

Bước 2: Tìm nhân tử.

Nhân tử nào mà chứa cả $X=\frac{\pi}{3}$ và $X=-\frac{\pi}{3}$?

Để cho đơn giản, ta sẽ tìm nhân tử dưới dạng $\sin(ax+b\pi)$ hoặc $\cos(ax+b\pi)$

Dễ thấy rằng nhân tử $\cos x-\frac{1}{2}$ chứa cả 2 nghiệm trên, như vậy ta sẽ phân tích PT sao cho có nhân tử $2\cos x-1$

Bước 3: Phân tích.

Đến đây là rất dễ rồi còn gì: PT tương đương với $4\cos x-2=\sin 2x-\sin x$

$\Leftrightarrow 2(2\cos x-1)=\sin x(2\cos x-1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0\\ \sin x=2\end{array}\right.\ldots$ ☺

VD2.

ĐK: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Bước 1: Tìm nghiệm.

Trước hết ta được $X=\pm\frac{\pi}{3}$ như VD1, nhưng PT có thể có nghiệm khác, phải làm sao để tìm ra chúng?

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Các bạn sử dụng kĩ xảo tối ưu hóa việc vét nghiệm của PT, cụ thể ta sửa PT thành $\dfrac{1+\tan X-2\sqrt{2}\sin\left(X+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(X^2-\frac{\pi^2}{9}\right)}$, rồi gán X = 0 cho máy giải. Như vậy máy sẽ không thể hiển thị lại nghiệm $X=\pm\frac{\pi}{3}$ nữa.

Ta được tiếp $X=-\frac{\pi}{4}$, gán tiếp $X=-X$ vẫn được $X=-\frac{\pi}{4}$. Lúc này các bạn gán $X=X+\pi$ (tức gán $X=\frac{3\pi}{4}$), máy cho nghiệm mới $X=\frac{3\pi}{4}$

Như vậy PT có 3 họ nghiệm (có thể còn nữa, nhưng chừng ấy là đủ rồi ☺):

$X=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi; X=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Bước 2. Tìm nhân tử.

Với $X=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$: nhân tử $2\cos x-1$

Với $X=-\frac{\pi}{4}+k\pi$: giả sử nó là nghiệm của $\sin(ax+b\pi)$ thì:

$$\sin(ax+b\pi)=0\Leftrightarrow ax+b\pi=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}\pi+\frac{k\pi}{a}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Do đó nhân tử cần tìm là $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ (hay là $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}$).

Bước 3. Phân tích.

$$1+\tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\cos x+\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \frac{1}{\cos x}=2\end{array}\right. \ldots$$

Có nhiều bạn sẽ ngay lập tức biến đổi:

$1+\tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 1+\tan x = 2(\sin x+\cos x)$, bởi vì hầu hết chúng ta không thích các loại cung liên kết và do đó luôn tìm cách phá nó ra. Làm như vậy cũng ra thôi nhưng sẽ không nhanh bằng cách trên, và rất buồn cười bởi vì sau đó lại phải gộp lại: $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Cuối cùng mình muốn nói một điều đó là nếu các bạn thử nhân tử bằng cách trên tầm 4; 5 lần mà không ra thì phải từ bỏ ngay máy tính và lập tức giải tay.

b) Phương trình đa thức

Đa thức của Bộ Giáo dục chỉ có thể là đa thức nguyên mà thôi! ☺

Sau khi đã được học cách khai triển đa thức nguyên ở mục **3a)** rồi, liệu các bạn có sáng tạo ra được cách phân tích đa thức nguyên thành nhân tử hay không?

Hay là nghĩ phần sau thể chi cũng có nên không nghiên cứu gì thêm nữa? ☹

Phân tích PT thực ra là để trình bày bài, chứ "làm đẹp" trên máy tính thôi thì chẳng có gì khó, nhưng sẽ mất hứng quá! ☺

Như ta đã biết bất cứ PT đa thức nào cũng có thể phân tích thành tích của các nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai, và đó là việc phải làm của chúng ta trong mục này.

Do đó nếu đa thức có nghiệm thì sẽ rất dễ, cụ thể như sau:

VD1. Giải PT $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$

Với X = 0 thì Solve cho số xấu: 0,3027756377 ☹

Mặc kệ nó "đẹp" đến thế nào, ta cứ lưu vào A đã: $X \to A$

Tối ưu hóa ta lại được X = 1. Các bạn cảm thấy sao chứ mình thấy nghiệm này là không thích, vì mình đã hi vọng nó là 1 nghiệm xấu "tương đồng" với nghiệm A kia! ☺

Phải đợi đến tiếp theo là giải PT $\dfrac{X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 4X + 1}{(X - A)(X - 1)}$, mình mới được cái nghiệm tương đồng với A, đó là $X = -3,302775638$, lưu ngay vào B.

Như mình đã nói trước đó, $L - R = -9,02417 \times 10^{-14} \approx 0$ nên không phải lo lắng thêm gì về nghiệm nhận được cả. ☺

Cuối cùng thì PT chỉ có 3 nghiệm đó thôi.

Sở dĩ mình nói cái nghiệm B đó tương đồng với A vì nhìn qua đã thấy, phần thập phân gần như giống nhau, và khả năng chúng giống phần thập phân là rất cao bởi vì ở nghiệm B có chút sai số, do đó nếu chúng có chung phần thập phân thì đó sẽ là phần thập phân của A mà các bạn hiện đang thấy.

Khi có 2 nghiệm như vậy, thì yên tâm là ta đã tìm được 1 nhân tử bậc 2 của PT rồi, đơn giản vì nó là "2 nghiệm liên hợp", cho nên mình mới nói "Mặc kệ nó 'đẹp' đến thế nào". ☺

Nếu chưa rõ, các bạn có thể xem lại 2 nghiệm của PT bậc 2: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Rõ ràng đây là 2 nghiệm liên hợp ra số đẹp, và tổng cũng đẹp, vì lẽ đó mà ta dễ dàng truy được cái nhân tử bậc 2 kia, bằng cách Viet: $\begin{cases} A + B = -3 \\ AB = -1 \end{cases}$

Vậy PT có nhân tử bậc 2 là $(x^2 + 3x - 1)$ và 1 nhân tử bậc 1 là $(x - 1)$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Các bạn còn nhớ câu kết ở mục **1c)** (Kỹ thuật xác định nghiệm đẹp PT vô tỉ) không?

Sở dĩ mình nói kỹ thuật ở mục đó chưa kết thúc là vì ở đây còn 1 cách nữa xác định nghiệm đẹp sử dụng Viet, khi có được nghiệm liên hợp (ở mục đó không có nghiệm liên hợp), các bạn đã thấy ở trên. Và nếu đang giữa lúc giải PT thì ta sử dụng luôn "nghiệm liên hợp" sẽ nhanh hơn dò TABLE nhiều. Do đó mà mình mới để nó sang phần này chứ không viết tiếp ở mục **1c)**.

Nhân đây mình cũng bổ sung luôn 1 mẹo nữa cho **1c)**, cũng sử dụng Viet để lấy nghiệm đẹp nhanh hơn mà không cần phải ghi ra PT bậc 2 chứa nó.

Đó là nếu tính A + B và AB mà ra số nguyên, thì tính luôn 2 biểu thức sau, đó chính là 2 nghiệm cần tìm: $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A+B+\sqrt{(A-B)^2}}{2}\\ \dfrac{A+B-\sqrt{(A-B)^2}}{2}\end{array}\right.$ (cái này chính là Viet phải không? ☺).

Sở dĩ mình nói số nguyên là vì hầu như phân số khi tính 2 biểu thức trên đều không hiển thị được dạng đẹp, lại vẫn ra số xấu như cũ. Nhưng nói chung mẹo này không quan trọng, vì công thức trên hơi khó nhớ.

Quay trở lại vấn đề chính nhé, như vậy nhân tử cuối cùng của PT chắc chắn bậc 2, vì PT đã cho có bậc 5.

Hơn nữa nhân tử đó vô nghiệm, vì ta đã không kiếm thêm được nghiệm thứ 4 nào nữa.

Do đó, chia đa thức là cách nhanh nhất.

Đến đây, thông minh 1 chút các bạn sẽ thấy việc chia $\dfrac{x^5+2x^4-3x^3+3x^2-4x+1}{(x-1)(x^2+3x-1)}$ hoàn toàn có thể bấm máy, bởi vì đó chính là: phương pháp xấp xỉ! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Để nguyên biểu thức $\frac{X^5+2X^4-3X^3+3X^2-4X+1}{(X-A)(X-1)(X-B)}$ trên màn hình rồi gán X = 1000 ta thu được $\frac{X^5+2X^4-3X^3+3X^2-4X+1}{(X-1)(X^2+3X-1)}=1000001$, và không khó để luận ra được nó chính là nhân tử (x^2+1)

Vậy sau vài dòng phân tích (vì trong bài thi các bạn không được viết ngay kết quả cuối cùng của việc phân tích), ta được:

$$x^5+2x^4-3x^3+3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)(x^2+3x-1)=0$$

Mình muốn nói thêm 1 cách khác xác định nhân tử bậc 2 cuối cùng nêu trên, nhanh hơn phương pháp chia đa thức nêu trên 1 chút, mà linh hoạt các bạn sẽ nhìn ra, như sau:

Ta đã biết được: $x^5+2x^4-3x^3+3x^2-4x+1=(x-1)(x^2+3x-1)(ax^2+bx+c)$

Nhìn hệ số đầu cuối trong PT, và hệ số đầu cuối của các nhân tử $(x-1);(x^2+3x-1)$ ta dễ dàng có a = c = 1, do đó chỉ cần dùng máy tìm b mà thôi.

Vì $\frac{x^5+2x^4-3x^3+3x^2-4x+1}{(x-1)(x^2+3x-1)}=x^2+bx+1$ nên ta gán vào X 1 giá trị bất kì để tính: $\frac{X^5+2X^4-3X^3+3X^2-4X+1}{(X-A)(X-1)(X-B)}-X^2-1$, rồi chia kết quả nhận được cho X, luôn ra chính xác b = 0

Giá trị X bất kì, đúng không nào? ☺

Trước khi tiếp tục VD2 mình cần nói vài điều quan trọng chỗ sử dụng Viet để tìm nhân tử bậc 2 từ 2 nghiệm A, B.

Có 1 sự cố kỹ thuật có thể xảy ra ở chỗ đó, là khi tích AB đẹp (luôn luôn đẹp), nhưng tổng xấu (số điện thoại).

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Vấn đề đó đã khiến mình rất thắc mắc, và cho đến nay mình mới hiểu ra, rằng nó thực ra cũng là số đẹp thôi, cụ thể là phân số, nhưng phần thập phân lại khiến ta tưởng là vô tỉ.

Vậy làm sao từ số điện thoại này có thể liên hệ được đến cái phân số đó? ☺

Nếu AB mà là 1 phân số, thì các bạn nhân ngay lập tức cái tổng A + B này với mẫu số của AB, sẽ ra tử số của A + B, thế thôi. ☺

Còn nếu nó không là phân số thì… sẽ không có chuyện này! ☺

VD2. Giải PT $x^4+3x^3+x^2+4=0$

Lần giải đầu tiên thật là nản: $L-R=102279300,5$ ☹

Gặp trường hợp như vậy nên đặt lại giá trị ban đầu hơn là tiếp tục làm theo lệnh "Continue: [=]", cụ thể mình đặt lại X = 10, và chờ đợi…

Hừm, tình trạng vẫn y hệt như cũ! ☹

Nhưng chưa hết đâu, ta vẫn còn giá trị ban đầu $X=-10$ mà, và quả thực lần này, sự kiên nhẫn đã được đền đáp xứng đáng: con số -2 tròn trĩnh! ☺

Tuy nhiên khó khăn chưa dừng lại ở đó! Bằng chứng là các bạn không thể truy thêm nghiệm nào nữa dù tối ưu hóa bằng mọi cách, phải chăng PT chỉ có 1 nghiệm duy nhất???

Trong tình huống "tắc nghiệm" như vậy, các bạn nên sử dụng kiến thức về PT của mình để xử tiếp, cụ thể là đạo hàm.

Ta có được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
f'(x)		$-$		$+$		$-$		$+$	
f(x)	$+\infty$				$\frac{1029}{256}$				$+\infty$
			0				4		

Nhìn vào đó thấy ngay PT chỉ có 1 nghiệm duy nhất $x=-2$ mà thôi.

Đến đây mình đặt giả thiết là các bạn đang cần phân tích PT trên thành nhân tử, vậy chúng ta sẽ phân tích thế nào khi nó chỉ có 1 nghiệm như vậy?

Rõ ràng vì PT luôn phân tích được thành 2 tam thức bậc 2 nào đó, do đó -2 phải là nghiệm của ít nhất 1 trong 2 tam thức đó, như vậy tam thức này có nghiệm kép, nói cách khác, nó chỉ có thể là tam thức $(x+2)^2$

Do đó, nhìn hệ số ta được nhân tử còn lại là: $x^2+bx+1=\dfrac{x^4+3x^3+x^2+4}{(x+2)^2}$

Dễ dàng bấm ra $b=-1$

Tự tin đến với tình huống khó nhất nhé:

VD3. Giải PT sau trên tập số phức: $2x^4+x^3+4x^2+2x+3=0$

Xác định là trong bài thi loại PT này chỉ có thể ra ở câu số phức thôi các bạn nhé, và do đó nó thường không có nghiệm thực mà chỉ có nghiệm phức.

Nhưng dù nghiệm gì đi nữa, thì đến 99% chắc chắn rằng "các vị" muốn các bạn phải phân tích PT thành 2 tam thức bậc 2, từ đó giải ra các nghiệm.

Loại này mình đã gặp kha khá nhiều ở câu số phức rồi. ☺

Mình cũng nói luôn là PT này không có nghiệm thực để các bạn đỡ Solve nữa, bây giờ chỉ còn việc sử dụng máy tính phân tích nó ra 2 tam thức bậc 2 vô nghiệm.

Làm cách nào đây?

Mình sẽ nêu ra đây 1 cách dựa vào kiến thức và sự linh hoạt mà mình đã sử dụng trước đây, vì khi ấy mình chưa có cách nào nhanh hơn để phân tích dạng này.

Thứ nhất là: hệ số sau phân tích hầu như luôn là số nguyên nhỏ, đó là đặc trưng của 1 cái đề đẹp: đánh vào kiến thức suy luận chứ không đánh vào việc tính toán xử lí những số xấu, và đó là xu hướng ra đề của Bộ.

Từ đó nhìn hệ số đầu và cuối của PT, suy ra hệ số đầu của 2 nhân tử lần lượt là 1 và 2, hệ số cuối của chúng là 1 hoặc 3

Căn cứ vào đó mình bắt đầu dùng máy tính thử 2 trường hợp sau:

+ TH1: nhập vào máy $\dfrac{2X^4+X^3+4X^2+2X+3}{X^2+BX+3}$. Nếu với X nguyên cố định, mình cho B chạy trong các số nguyên mà kết quả phép chia này nguyên, thì thỏa mãn, vì vốn dĩ các hệ số nhân tử đều nguyên.

Thứ hai: thông thường là B nhỏ, tầm trong khoảng $[-5;5]$ nên mình sẽ gán X = 10 rồi tiến hành chạy B trong khoảng này…

Vâng, các giá trị lần lượt nhận được như sau: $\dfrac{21423}{53};\dfrac{7141}{21};\dfrac{21423}{73};\dfrac{21423}{83};\dfrac{7141}{31};\ldots$

Nói chung là chả có số nào nguyên cho cả. ☹

Do đó ta phải xét sang TH2.

+ TH2: sửa thành $\dfrac{2X^4+X^3+4X^2+2X+3}{X^2+BX+1}$

Phần âm cũng khá nản, nhưng đến B = 1 thì kết quả rất đẹp: 193. Vậy khả năng là ta có nhân tử (x^2+x+1), và khi đó, dễ dàng chia ra nhân tử còn lại là $(2x^2-x+3)$

Bây giờ chỉ cần dùng “nguyên tắc TGTTN” là kết thúc vấn đề. ☺

Thực tế các bạn đã nghĩ rằng, nhờ may mắn mà chỉ cần thử đến TH2 là có được kết quả rồi phải không? Vì hệ số đầu của nhân tử cần tìm nhận 1 hoặc 2, và hệ số cuối cũng có 2 cách chọn, nên đầy đủ ra ta phải xét 4 TH.

Có thật là như thế không? ☺

Oh no! Trên thực tế, vì đề chỉ ra hệ số là nguyên và dưới 10, nên để ý một tí các bạn sẽ nhận ra ngay quy luật, đó là chỉ cần xét 1 nửa của tổng số TH là xong rồi.

Điều này không khó để hiểu được, chỉ cần các bạn chịu khó liệt kê số ước nguyên dương của các số tự nhiên từ 1 đến 10 là rõ. Vả chăng vì việc chứng minh điều này không quan trọng, nên các bạn chỉ cần nhớ lấy cái quy luật đó là được rồi, mình không nói thêm nữa. ☺

Thậm chí, nếu không biết quy luật này, thì các bạn chỉ cần thử theo cách sau:

+ Cho hệ số đầu tiên của mỗi nhân tử chạy dần từ thấp lên cao.

+ Ứng với mỗi giá trị của nó, ta ghép với tất cả các giá trị có thể của hệ số cuối, rồi thử từng trường hợp.

Như đã nói, các bạn cùng lắm cho hệ số đầu chạy hết 1 nửa số giá trị có thể của nó là xong rồi, sẽ không phải chạy hết tất cả đâu.

Cụ thể nhé: trong bài phía trên, hệ số đầu có thể nhận 1 hoặc 2, cuối nhận 1 hoặc 3. Như vậy:

+ Cho hệ số đầu chạy lần lượt từ 1 đến 2.

+ Ứng với mỗi giá trị 1; 2 đó, mình ghép với hệ số cuối là 1 hoặc 3, do đó sẽ có tất cả 4 TH để thử.

Và các bạn đã thấy đấy, mình chỉ cần thử với hệ số đầu bằng 1 là xong rồi, không cần thử thêm số 2 nữa, nghĩa là đáng ra có 4 TH nhưng chỉ cần một nửa thôi, 2 TH là được.

Rõ ràng cách này có thể xử lí hầu như các bài cần phân tích thành nhân tử trong đề thi Quốc gia, nhưng độ nhanh phụ thuộc vào đề và sự linh hoạt, kinh nghiệm của người làm khá nhiều, do đó chưa phải là cách tối ưu.

Và vấn đề này, vẫn cần phải nghiên cứu tiếp…

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Vậy là đã qua dạng khó nhất rồi, nhưng mục này chưa xong đâu! ☺

VD4. Phân tích PT $3x^2 - 2xy - y^2 - 10x - 2y + 3 = 0$

2 ẩn cần lắm chứ, học bây giờ lúc sau học giải hệ PT 2 ẩn sẽ đơn giản hơn rất nhiều đấy, vì mình viết theo logic cái sau ứng dụng cái trước, nên không thừa đâu! ☺

"Các bạn sẽ được luyện tập lại mục này một lần nữa đấy!…", có nhớ đã đọc câu này ở mục nào phía trước rồi không? ☺

Nếu không nhớ thì tìm lại nhé, thực ra các bạn đã được biết cách làm rồi đấy, ở mục này chỉ mang tính luyện tập lại thôi.

Nhập PT vào máy, dùng Solve giải tìm X với Y = 1000, ta được X = 1003 = Y + 3

Vậy nhân tử đầu tiên là $(x - y - 3)$ ☺

Rõ ràng với Y = 1000 thì PT trên biến thành PT bậc 2 ẩn X, nên có thể có nghiệm nữa.

Vâng, không cần tối ưu hóa cũng dễ dàng tìm được nghiệm thứ hai:

$X = -333 = -\frac{999}{3} = -\frac{Y-1}{3} \Rightarrow$ nhân tử còn lại là $(3x + y - 1)$

Kết luận: $PT \Leftrightarrow (3x + y - 1)(x - y - 3) = 0$

Nhớ cái mấu chốt tư duy của chúng ta là hệ số thường nhỏ trong khoảng $[-5;5]$, nên mới viết lại $-333 = -\frac{999}{3}$, thì mới có thể tìm được nhân tử hợp lí. ☺

VD5. PT $3x^2y - xy^2 + xy - 2y^2 - 3x - 9y + 5 = 0$

Bài này thì tự làm thôi nhỉ? Khó hơn bài trên đấy, nhưng cũng không khó lắm! ☺

Kết quả để đối chiếu này: $(3x - y - 5)(xy + 2y - 1) = 0$

Lưu ý đã từng nói: nghiệm ra mà vô tỉ thì đa thức không phân tích được thành nhân tử.

∗ Phần đọc thêm: phân tích PT đa thức 3 ẩn x, y, z! (đọc thêm nên không viết riêng ra ☺).

Cách phân tích 3 ẩn cũng không phải là khó lắm để nghĩ ra vì nó tương tự như 2 ẩn thôi. Mình không trực tiếp nghĩ ra nhưng mình thấy nó cũng tàm tạm, nên giới thiệu vào đây. Từ cái cách đó các bạn có thể hiểu sâu sắc được mô típ chung mà ta đang sử dụng để phân tích đa thức nhiều ẩn.

Cách đó như sau: dùng Solve giải PT 3 ẩn cần phân tích theo biến x, trong đó 2 biến y, z được gán lần lượt là Y = 10; M = 100 (trong máy tính không có biến z nên thay bằng M). Như vậy, nghiệm X thu được sẽ phân tích lại theo Y, M, cụ thể: $X = aY + bM + c$ trong đó a, b, c được lựa chọn sao cho chúng thuộc $[-5;5]$

Nhìn qua là thấy khó khăn tăng lên nhiều so với 2 ẩn rồi. Vì chúng ta phải phân tích được 1 con số thành 1 biểu thức 2 biến, 3 hệ số. Trong khi đó với 2 ẩn, ta chỉ phân tích $X = aY + b$ thì chỉ là 1 ẩn, 2 hệ số thôi (mà đôi khi còn làm sai nữa là ☹).

Mình không lấy VD gì cả, các bạn nếu muốn thử thì tự bịa ra thôi (cách bịa: viết 1 đa thức 3 ẩn đã phân tích, sau đó đem khai triển bằng tay ra, sẽ được cái đề bài để mà thử ☺).

Nguyên tắc thì đã có rồi, cho nên… The end!

c) Phương trình vô tỷ

Với loại PT này, ngoài kỹ thuật vét nghiệm mà các bạn đã biết, thì chúng ta còn có thể sử dụng 1 cách khác, đó là theo kinh nghiệm. Tức là nhập giá trị khởi đầu phù hợp.

Ta gán X lần lượt $0; 10; -10$ cho máy giải, thì trong hầu hết trường hợp sẽ vét được hết các nghiệm của PT.

Còn 1 kinh nghiệm khác, là với PT vô tỷ, nếu nghiệm là vô tỷ thì sẽ dễ dàng giải trên MTBT hơn tất cả các loại nghiệm khác. Điều này có vẻ khó tin?

Chính xác! Chúng ta thường thất vọng khi nhận được một "số điện thoại" từ việc giải PT của máy tính. Và khi đó, hẳn các bạn phần nhiều đã "rơi máy" và giải tay. ☹

Nhưng điều đó cũng tốt thôi, nó làm các bạn ít phụ thuộc vào máy tính và buộc cái não mình phải chiến đấu mạnh hơn. ☺

Mình nói thật đó, xong phần này rồi các bạn sẽ mong nghiệm xấu ngay lập tức! ☺

Còn 1 điều "bí ẩn" nữa, đó là nếu PT mà phải đặt nhiều điều kiện (ít cũng tương tự), thì các bạn hãy xem có thể đưa được nó về dạng khác (PT hệ quả) mà số điều kiện phải đặt là ít hơn hay không. Nói chung là thực hiện 1 biến đổi nhỏ giảm bớt điều kiện, nếu có thể. Khi đó hãy nhập PT hệ quả đó cho máy giải chứ đừng dùng PT ban đầu.

Lí do của việc làm này là để nâng số nghiệm lên, vì PT hệ quả có thể có thêm những "nghiệm ngoại lai" ngoài những nghiệm của PT gốc (do điều kiện bị giảm bớt đi). Khi càng có nhiều nghiệm, việc truy nhân tử sẽ càng dễ dàng. Còn việc loại "nghiệm ngoại lai" thì không nằm trong kỹ thuật CASIO.

Tiêu biểu trong số đó là PT có chứa phân thức, chỉ cần nhân mẫu lên là mất luôn ĐK của mẫu, tuy nhiên mình nói là để lưu ý lúc các bạn lao vào "cuộc chiến" mà thôi, ở đây hầu như không có PT nào phải "biến hình" như vậy cả.

Với kiến thức CASIO đến lúc này thì chắc các bạn phải hiểu được đến 90% lí do việc làm của chúng ta rồi phải không?

Tốt đấy! ☺ Bây giờ mời các bạn xem!

1)) Dạng PT chứa 1 căn của nhị thức bậc nhất

VD1. $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Đừng quên đặt điều kiện nhé: $\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{4}\le x\le \frac{3-\sqrt{11}}{2} \\ x\ge \frac{3+\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$ (Xấu thế! ☺).

⊕ Cách thứ nhất

Đặt $\sqrt{4x+5}=t \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ x=\dfrac{t^2-5}{4} \end{cases}$, thu được PT hệ quả: $2\left(\dfrac{t^2-5}{4}\right)^2-6\left(\dfrac{t^2-5}{4}\right)-1=t$

Đến đây thế nào các bạn? Cho máy giải tiếp thôi, nó chính là PT đa thức ở mục **b)**.

Cụ thể nó là cái PT bậc 4: $(t^2-5)^2-12(t^2-5)-8t-8=0$

Tại sao mình lại viết lại như thế? Là để máy giải đỡ "tốn sức" thôi, chứ nhập nguyên cái trên vào cũng được, nhưng sẽ lâu.

Vậy ta truy được 4 nghiệm t.

Do đó ta phân tích PT thành: $(t^2-2t-11)(t^2+2t-7)=0$ (PT này đã rút gọn hệ số). Lỡ may nó vô nghiệm thì các bạn cũng biết cách phân tích nó thành nhân tử được rồi.

Đến đây các bạn có thể giải t ra nghiệm đẹp rồi thế vào giải x, nếu không thì:

Thế quay lại $t=\sqrt{4x+5}$ vào ta được: $(4x-6-2\sqrt{4x+5})(4x-2+2\sqrt{4x+5})=0$

Rút gọn đi: $(2x-3-\sqrt{4x+5})(2x-1+\sqrt{4x+5})=0$

Cái nhân tử là PT cơ bản rồi, việc giải nó không phải là việc của mình. ☺

⊕ <u>Cách thứ hai</u>

Cách này hẳn đã có rất nhiều người đã đọc nó rồi, trong các group về CASIO trên mạng.

Đó là sử dụng MODE TABLE (mình đã nói từ trước rồi mà, chức năng này rất quan trọng! ☺).

Cách này rất nhanh, bởi vì giải trực tiếp luôn x bằng Solve mà không phải đặt điếc gì cả.

Solve dễ dàng thu được 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} X=-0,4142135624 \rightarrow A \\ X=3,732050808 \rightarrow B \end{array}\right.$ (tinh ý thì nhận ra được nghiệm thứ nhất chính là $1-\sqrt{2}$ ☺).

Cơ sở của cách này bắt nguồn từ việc quan sát nhân tử ở Cách 1, cụ thể ta viết các nhân tử như sau: $\left[\begin{array}{l} 2x-\sqrt{4x+5}=3 \\ 2x+\sqrt{4x+5}=1 \end{array}\right.$, từ đó suy ra dạng chung là $ax+c\sqrt{4x+5}=b$ (trong đó a, b, c đều nguyên).

Như vậy với 1 giá trị c cố định, nếu ta có thể dùng TABLE dò được giá trị a nguyên, sao cho kết quả $ax+c\sqrt{4x+5}$ là 1 giá trị nguyên (là b), thì coi như đã xong.

Giá trị c thì ta lựa chọn dựa vào kinh nghiệm thôi. Theo mình, các giá trị a, b, c đó chỉ có thể thuộc khoảng $[-5;5]$ mà thôi, do đó ta cứ chọn từ 0 trước, riêng c thì hệ số của căn nên $c\neq 0$

Trước hết chọn c = 1, nhập vào MODE TABLE biểu thức $f(X)=XA+\sqrt{4A+5}$ (nên nhớ X là để dò, A mới là biến chứa cái nghiệm đã giải được).

Khoảng chạy khuyên dùng trong sách này là $[-14;14]$ với Step = 1

Màn chạy đầu tiên rất thuận lợi, có ngay $f(2)=1 \Leftrightarrow 2A+\sqrt{4A+5}=1$, như vậy đã tìm được nhân tử $(2x-1+\sqrt{4x+5})$

Màn chạy thứ 2 là với $f(X)=XB+\sqrt{4B+5}$, cũng dễ dàng thu được $f(-2)=-3$, vậy ta được $-2B+\sqrt{4B+5}=-3 \Rightarrow (2x-3-\sqrt{4x+5})$

Qua đây các bạn có nhận ra 1 điều là khi nhập biểu thức vào TABLE, ta chỉ cần lấy c từ 1 đến 5 mà không cần lấy các số âm từ $-1 \rightarrow -5$ hay không? ☺

Nhìn vào 2 nhân tử của PT ở Cách 1, các bạn hẳn sẽ cảm tưởng rằng ta phải chọn c ở 2 lần chạy lần lượt là 1 và -1 thì mới thành công phải không? Nhưng thực ra cả 2 lần đều đã để c = 1 đấy thôi, lí do rất đơn giản: vì $c\sqrt{4x+5}=b-ax$ nên ta chỉ cần chọn c dương, còn việc quyết định viết dấu của c âm hay dương trong nhân tử chính thức sẽ do a, b đảm nhận, mình "không cần quan tâm". ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Vậy qua 2 cách thì hẳn các bạn sẽ gật đầu lia lịa với Cách 2, vì dùng nó có vẻ nhanh hơn, nhưng mình lại để Cách 1 lên đầu bởi nó rất là tự nhiên, có thể vừa trình bày vừa bấm, và đó cũng là cách xưa nay người ta vẫn sử dụng, còn phân tích thành nhân tử như Cách 2 thì nhanh đấy nhưng hơi thiếu tự nhiên. ☺

VD2. $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$

⊕ Cách thứ nhất

Đặt $\sqrt{x+3}=t\Rightarrow x=t^2-3\Rightarrow 2t=9(t^2-3)^2-(t^2-3)-4$

Ta được các nghiệm t sau: $X=2;\ X=1,474809634;\ X=-\frac{5}{3};\ X=-1,808142967$

Ở đây 2 nghiệm lẻ không cùng phần thập phân, nhưng vẫn có thể là 2 nghiệm liên hợp, do đó mà ta vẫn phân tích được: $(3t^2+t-8)(3t^2-t-10)=0$, không có gì phải nói thêm! ☺

⊕ Cách thứ hai

Lưu ý rằng TABLE hầu như chỉ hữu hiệu với nghiệm xấu thôi nhé, đó chính là nhược điểm của nó đã bắt đầu "lộ diện"! ☺

Và đó cũng là lí do tại sao mình đã nói là các bạn sẽ thích nghiệm xấu hơn sau khi học xong phần này.

Mình chỉ cần dò được 1 nghiệm xấu $A=-0,8249365445$ là lao vào TABLE ngay, còn số 1 kia thì không giúp được gì.

Với nghiệm A: $f(X)=XA+\sqrt{A+3}$, ta được $f(3)=-1\Rightarrow 3A+\sqrt{A+3}+1=0$, đó là nhân tử $(3x+\sqrt{x+3}+1)$

Vậy nghiệm 1 còn lại làm sao giúp ta dò được nhân tử còn lại? Rõ ràng với 1 mà làm theo cách trên ta thu được tất cả f(X) đều là giá trị nguyên.

Trước đó thì vừa dò vừa cầu mong 1 giá trị nguyên nào đó sẽ mau chóng lòi ra để mà "bộp" ngay, lần này cả đống nó tuôn ra lại chẳng dám lấy cái nào nữa, dù thừa biết rằng "hắn ta" cũng đang giấu mặt trong đống đó. ☺

Còn 1 nghiệm nữa thì chỉ có 1 nhân tử nữa thôi, do đó, việc chia biểu thức sẽ cho ta biết!

Mình chưa nghĩ cách nào khác hơn ngoài việc quyết định chia biểu thức chứa căn 1 phen. Dù điều đó làm các bạn cảm thấy khó khăn, nhưng mình thì không, đơn giản vì mình đã có 2 từ: Kỹ thuật. ☺

Đó là "kỹ thuật chia biểu thức chứa căn": $g_2(x)=\dfrac{f(x)}{g_1(x)}=\dfrac{9x^2-x-4-2\sqrt{x+3}}{3x+\sqrt{x+3}+1}$

Trước tiên ta dự đoán dạng của $g_2(x)$, nó thường cùng dạng với $g_1(x)$, nghĩa là ta giả sử $g_2(x)=ax+b+c\sqrt{x+3}$. Thực ra trong đề thi nhân tử vô tỉ chỉ có đến thế này là cùng, nếu chẳng may các bạn có gặp nhân tử bậc cao hơn (VD: $ax^2+bx+c+d\sqrt{x+3}$) thì khả năng là các bạn chưa phân tích hết thôi. ☺

Kỹ thuật này mình sẽ hướng dẫn kĩ càng và thực hiện nó qua mấy VD sau, vì nó hơi khó nhớ. Để nắm chắc nó các bạn phải hiểu được bản chất và thường xuyên luyện tập.

Trước hết nhập vào máy: $\dfrac{9X^2-X-4-2\sqrt{X+3}}{3X+\sqrt{X+3}+1}$

$\boxed{CALC}$ và lựa chọn X sao cho giá trị $\sqrt{X+3}$ là số vô tỉ (do đó X + 3 không thể là số chính phương): mình cho ngay X = 0 là đẹp nhất, thu được kết quả $-1-\sqrt{3}$

Sở dĩ làm vậy là vì mình muốn phân định rõ phần vô tỉ ($-\sqrt{3}$) và phần hữu tỉ (-1) trong kết quả để tiến hành làm bước tiếp theo, muốn thế phải làm sao cho kết quả có căn, tức phải chọn X sao cho $\sqrt{X+3}$ là số vô tỉ, thì kết quả mới có căn được.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Tiếp theo, vì $g_2(X) = aX + b + c\sqrt{X+3}$, mà kết quả trên lại chính là $g_2(0)$, nên đồng nhất ta có $\begin{cases} a.0 + b = -1 \\ c\sqrt{0+3} = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow b = c = -1$

Vậy ta được: $aX - 1 - \sqrt{X+3} = \dfrac{f(X)}{g_1(X)} \Leftrightarrow aX = \dfrac{9X^2 - X - 4 - 2\sqrt{X+3}}{3X + \sqrt{X+3} + 1} + 1 + \sqrt{X+3}$

Quay lại biểu thức đã nhập, sửa thành $\dfrac{9X^2 - X - 4 - 2\sqrt{X+3}}{3X + \sqrt{X+3} + 1} + 1 + \sqrt{X+3}$

Theo trên, ta tính biểu thức mới này với X bất kì sau đó chia kết quả nhận được cho X, luôn nhận được 1 số cố định, và đó chính là giá trị của a: a = 3 ☺

Kết luận nhân tử còn lại là $(3x - 1 - \sqrt{x+3})$

Thế nào? Thấy bất ngờ chứ? Đây chính là kỹ thuật mình thích nhất trong phần này đấy!

Nói lại, có 2 điểm mấu chốt mà các bạn phải hiểu lí do của nó:

+ Điểm 1: suy đoán ra được dạng của $g_2(x)$ để sau đó đồng nhất với kết quả.

+ Điểm 2: để lấy được 1 kết quả cụ thể đem đồng nhất với cái dạng đã biết kia, phải lựa được X gán vào sao cho kết quả hiện rõ được dạng của $g_2(x)$, tức là giữ được căn.

Dù các bạn có dùng cách gì để tìm nhân tử kia đi nữa thì cách này vẫn là nhanh nhất, ít ra là trong trường hợp này.

Tiếp tục học rồi các bạn sẽ được thấy nó còn "mạnh" hơn những gì vừa xong, khi chứng kiến nó "xử đẹp" những phép chia nhiều căn phức tạp! ☺

<u>VD3</u>. $x^2 - 15x - 18 - (2x^2 - 6x - 18)\sqrt{x+1} = 0$

Mình vẫn thử 2 cách nhé!

⊕ <u>Cách thứ nhất</u>

Ta chuyển được về PT ẩn t: $(t^2-1)^2-15(t^2-1)-18-t[2(t^2-1)^2-6(t^2-1)-18]=0$

Tối ưu hóa không có nghĩa là sẽ không bỏ sót nghiệm, mình gặp ngay 1 phát "Can't Solve" dù đã tối ưu hóa, nhưng sau đó thay đổi giá trị khởi đầu và nhận thêm được nghiệm thứ 4. Hãy nhớ: kỹ thuật "đơn phương độc mã" mạnh mấy cũng không thể đánh bại một nhóm kỹ thuật nhỏ cùng phối hợp.

4 nghiệm, và có 2 nghiệm liên hợp: $A=0,7320508075; B=-2,732050808; X=1; X=\dfrac{1}{2}$

Vậy chẳng có gì khó để tìm ngay ra 2 nhân tử bậc 2 của nó: $(t^2+2x-2); (2t^2-3t+1)$

Nhân tử còn lại bậc 1, chia là xong: $(1-t)$, ồ vậy hóa ra không phải như trên!

Ý mình là phải phân tích nhân tử thế này mới hợp lý: $(2t-1)(t^2+2t-2)(t-1)^2=0$ ☺

Thế căn vào: $(2\sqrt{x+1}-1)(x-1+2\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1})^2=0$

Giả sử ta phải chia biểu thức như ở VD2 thì đó quả là 1 thách thức lớn đó! ☺

⊕ Cách thứ hai

2 nghiệm: $X=0; A=-0,4641016151$ dễ dàng tìm được, thế nhưng nếu giải tiếp các bạn có thể sẽ gặp $X=1\times10^{-50}$ như thật! Thực ra đó chính là nghiệm X = 0 thôi, nhưng do sự sai số nên dù đã tối ưu hóa, máy vẫn hiện lại được nghiệm cũ, có điều phải hiện ở dạng sai số, không thể "tuyên bố thẳng thừng" X = 0 được. ☺

Với nghiệm A kia, cho TABLE dò được nhân tử: $(X-1+2\sqrt{X+1})$

Vậy ta phải chia biểu thức: $g_2(x)=\dfrac{f(x)}{g_1(x)}=\dfrac{X^2-15X-18-(2X^2-6X-18)\sqrt{X+1}}{X-1+2\sqrt{X+1}}$ ☹

Kệ nó, chia như trên thôi, phải thử hết qua các công cụ đã biết rồi mới kết luận được chứ!

$g_2(x)$ ta vẫn đoán dạng như cũ, coi như là chưa biết gì hơn: $g_2(X)=aX+b+c\sqrt{X+1}$

Chọn X = 1 cho căn nó vô tỉ nhé, ta được: $g_2(1) = 11 - 8\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a+b=11 \\ c=-8 \end{cases}$

Làm sao tìm ra a, b đây? Rõ ràng ta cần 1 liên hệ nữa của a, b, muốn vậy ta thêm 1 giá trị X nữa, vẫn phải đảm bảo giá trị căn là số vô tỉ.

Chọn tiếp X = 2 ta được: $g_2(2) = 16 - 10\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=16 \\ c=-10 \end{cases}$

Sao giá trị c lại thay đổi thế này??? Cứ tưởng đã biết $c = -8$ rồi chứ?

Điều này mình đưa ngay đến việc nghĩ rằng c không phải là hằng số cố định, rõ ràng là cho X = 4 lại nhận được 1 giá trị khác: $\begin{cases} 4a+b=26 \\ c=-14 \end{cases}$, vậy nó có dạng: $c = mX + n$

Tức là $g_2(X) = aX + b + (mX+n)\sqrt{X+1}$

Trước hết ta giải a, b trước đã: $\begin{cases} a+b=11 \\ 2a+b=16 \\ 4a+b=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=6 \end{cases}$

3 PT 2 ẩn mà có nghiệm duy nhất như vậy thì khả năng a, b là đúng rồi đó.

Bằng cách tương tự, ta được $\begin{cases} m+n=-8 \\ 2m+n=-10 \\ 4m+n=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=-6 \end{cases}$

Vậy khả năng cao là $g_2(x) = 5x + 6 - (2x+6)\sqrt{x+1}$. Làm sao biết chắc được đây?

Ồ, "nguyên tắc TGTTN" thôi, chẳng còn gì khác nữa. ☺

Vâng, chính xác: $PT \Leftrightarrow (x - 1 + 2\sqrt{x+1})[5x + 6 - (2x+6)\sqrt{x+1}] = 0$

Các bạn nên nhớ rằng $[5x + 6 - (2x+6)\sqrt{x+1}]$ chưa phải là 1 nhân tử cơ bản (nhân tử trước mới phải), nên có có thể vẫn phân tích tiếp được.

Nhưng nó có chứa nghiệm x = 0, đây là 1 nghiệm vô dụng để có thể phân tích tiếp cái $g_2(x)$. Đó là một sự bế tắc của <u>Cách thứ hai</u> khiến ta phải dừng tại đây! ☺

Tuy không giải quyết được hết bài toán nhưng nó cũng cho các bạn 1 kinh nghiệm quý giá, đó là không nên chia biểu thức vô tỉ chỉ với việc thử 1 giá trị X, phải ít nhất từ 2 trở lên (vừa rồi mình đã dùng 3 giá trị là 1; 2; 4), để đề phòng nhân tử nhận được chưa phải là cơ bản (còn có thể gọi là nhân tử chưa "tối giản").

2)) Dạng PT chứa 2 căn của nhị thức bậc nhất

Mục 1 và mục 2 nhỏ này chủ yếu là áp dụng những gì đã được học từ trước, do đó không khó để nắm bắt.

VD1. $x-6-\sqrt{x+2}-4\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-x-6}=0$

Đây quả thực là 1 PT chứa 2 căn của nhị thức bậc nhất, bởi vì $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$

Các bạn sử dụng cách nào? Giải nghiệm tìm nhân tử hả?

Nếu dùng cách ấy thì trước hết phải đoán được dạng nhân tử. Nếu nó chỉ chứa 1 căn thì ta dùng $ax+b+c\sqrt{x+2}$ hay $ax+b+c\sqrt{x-3}$ để dò cũng được, công việc rất đơn giản, nhưng nếu nó chứa 2 căn, tức là $ax+b+c\sqrt{x+2}+d\sqrt{x-3}$, thì không đơn giản vì ta phải cố định cả c lẫn d, tức 2 ẩn, phép thử sẽ khá lâu. Chưa kể trong quá trình học các bạn sẽ thấy nhiều PT có từ 3 căn "tối giản" khác nhau trở lên (đó là loại căn không thể viết thành tích của 2 căn nhỏ hơn), chứ không phải ít căn như này đâu! ☺

Nói cách khác, việc dùng Cách thứ hai như ở trường hợp 1 căn gần như nắm đến 70% thất bại! ☺

Hơn nữa nếu làm theo Cách thứ nhất thì ta đã được học 1 công cụ rồi (không những thế được học những 2 lần), do đó dại gì không dùng.

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+2}=u\\ \sqrt{x-3}=v\end{cases}\Rightarrow v^2-3-u-4v+uv=0$

Việc viết cái $x-6$ thành v^2-3 ở đây mình làm mò 1 chút, nếu đa thức 2 ẩn này không phân tích được thì khi đó sửa lại thôi.

Áp dụng công cụ phân tích đa thức 2 ẩn thành nhân tử, ta được kết quả: Failure! ☹

Sau khi sửa nó thành $u^2-8-u-4v+uv=0$, vẫn bị Fail!

Cuối cùng thì cho $x-6$ chứa cả u lẫn v vậy: $x-6=\left[\begin{array}{l}2u^2-v^2-13\\2v^2-u^2+2\end{array}\right.$

Ta theo chủ nghĩa hệ số dưới 10 nên sẽ lựa chọn cái nào hệ số nhỏ, đem phân tích trước:

$2v^2-u^2+2-u-4v+uv=0\Leftrightarrow(u+v-1)(u-2v+2)=0$

Thành công, vậy $PT\Leftrightarrow(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-3}+2)=0$

Nhìn qua nhân tử thì thấy cũng áp dụng được Cách thứ hai, nhưng ai mà biết trước được.

VD2. $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+3}=u\\\sqrt{x+1}=v\end{cases}\Rightarrow u+v(u^2+v^2-4)=u^2+v^2-4+uv$ (rút kinh nghiệm VD1 ☺).

Tuyệt vời, được ngay $(v-1)(u^2+v^2-u-4)=0$ (PT này đã phân tích triệt để rồi nhé).

Vậy $PT\Leftrightarrow(\sqrt{x+1}-1)(2x-\sqrt{x+3})=0$ (thực ra bài này chơi tay bo 5 giây là viết xong).

Đến đây, lại "hạ nhục" Cách thứ hai thêm một lần nữa qua 2 điều:

+ Điều 1: giải PT trên được 2 nghiệm 0; 1, điều đó đã làm TABLE "chịu chết" rồi.

+ Điều 2: Không xác định được dạng của nhân tử. Thông thường trong PT có bao nhiêu căn "tối giản" thì trong nhân tử cũng sẽ có những căn đó, nhưng bài này thì không, cho nên thử đến "Tết Công Gô" cũng không ra được! ☺

Kết luận cuối cùng là trong bài thi các bạn nên dùng Cách thứ nhất. Và sự linh hoạt của trí óc lại được thể hiện 1 lần nữa, điều đó cho thấy những kỹ thuật CASIO không phải hoàn toàn xóa được việc tư duy của các bạn, chúng ta phải có suy nghĩ thì mọi kỹ thuật mới hoạt

động tốt được. Bởi vì những kỹ thuật này là 1 sự cách dụng máy tính theo hướng mới, nhưng đôi khi không tư duy thì vẫn bị mắc kiểu "trâu bò"! ☺

3)) PT chứa 1 căn của đa thức bậc cao

Rõ ràng là đến loại khó nhất rồi! ☺

VD1. $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$

PT chỉ có 2 nghiệm liên hợp A, B, vậy ta được nhân tử bậc 2: (x^2-5x-3)

Hẳn nếu các bạn đã tìm hiểu kỹ thuật CASIO trên mạng thì hầu hết sẽ tìm cách liên hợp PT cho ra cái nhân tử trên phải không? Đấy là cách mà nhiều người có thể nghĩ ra.

Vâng, đó là 1 định hướng rất hay, vừa bấm vừa trình bày được.

⊕ Cách thứ 1

Ta thấy cái căn kia mà liên hợp với số thì không bao giờ cho ra nhân tử trên, liên hợp với đa thức bậc từ 2 trở lên thì lúc sau bậc lại cao quá, vậy chỉ có thể liên hợp với $ax+b$

Tức là ta phải tìm $ax+b$ để liên hợp như sau: $\sqrt{x^3+1}-(ax+b)=0 \Leftrightarrow ax+b=\sqrt{x^3+1}$

Đường đi đến đây tiếp tục rẽ ra 2 nhánh, nhánh nào sẽ đưa đến thành công đây:

- Cách thứ 1.1

PT nhân tử $\sqrt{x^3+1}-(ax+b)=0$ phải chứa 2 nghiệm A, B kia, nói cách khác ta có hệ sau: $\begin{cases} Aa+b=\sqrt{A^3+1} \\ Ba+b=\sqrt{B^3+1} \end{cases}$

A, B là 2 nghiệm đã lưu rồi nên không cần làm đẹp cho nó, ta vào EQN nhận kết quả thôi. ☺

Kết quả từ EQN là a = b = 2, vậy ta liên hợp với biểu thức $2x+2$ là ra.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

- Cách thứ 1.2

Sử dụng TABLE (cho đến lúc này, TABLE vẫn đang chiếm ưu thế được sử dụng trong số các MODE chức năng).

Nhập vào $\left[\begin{array}{l} f(X) = XA + \sqrt{A^3+1} \\ f(X) = XB + \sqrt{B^3+1} \end{array}\right.$ đều thu được $f(-2) = 2 \Rightarrow -2x + \sqrt{x^3+1} = 2$

Xem ra TABLE nhanh hơn nhiều, vì ở đây chúng ta không phải bận tâm thêm về hệ số c như các biểu thức TABLE đã làm trước đó (là cái $ax + b + c\sqrt{x+1}$,...).

Việc trình bày còn lại giao cho các bạn! ☺

Nhưng đừng có sơ sểnh mà nghĩ là bài này đã hết rồi nhé! ☺

⊕ Cách thứ 2

Thực ra cách này là để tìm ra 1 kiểu trình bày khác mà thôi, kiểu này mang tính đề phòng cái trường hợp khi ta liên hợp và đặt nhân tử chung ra rồi mà phần "cồng kềnh" còn lại ở trong ngoặc lại không chứng minh cho nó vô nghiệm được.

Tất nhiên nếu đã trót đi theo hướng nào thì tuyệt đối không được thay đổi, vì thời gian thi không cho phép chúng ta nghiên cứu thêm cái gì mới nữa.

Với cách này, ta sẽ thực hiện phép chia $g_2(X) = \dfrac{f(X)}{g_1(X)} = \dfrac{2(X^2+2) - 5\sqrt{X^3+1}}{2X + 2 - \sqrt{X^3+1}}$ sau khi đã tìm ra được 1 nhân tử $g_1(X) = 2X + 2 - \sqrt{X^3+1}$

Chắc các bạn cũng biết làm rồi, vì nó cũng 1 căn như lần trước chúng ta đã chia, ở đây chỉ mang tính luyện tập lại thôi. ☺ Cho nên mình sẽ chia nhanh.

Dự đoán $g_2(X) = aX + b + c\sqrt{X^3+1}$

Nhập phân thức trên vào máy, cho X = 1 để $\sqrt{X^3+1}$ vô tỉ, ta được $1-\sqrt{2}$. Tiếp tục thử với X = 4 và X = 6 ta lần lượt thu được tiếp 2 kết quả: $1-\frac{2\sqrt{65}}{5};1-\frac{2\sqrt{217}}{7}$

Các bạn có hiểu tại sao mình lấy X = 4 và X = 6 mà không lấy số nhỏ hơn hay không?

Nếu $X=2\Rightarrow\sqrt{X^3+1}=3$ không phải vô tỉ.

Nếu $X=3\Rightarrow\sqrt{X^3+1}=2\sqrt{7}$ thì cái số 2 ở trước $\sqrt{7}$ đấy sẽ nhân vào hệ số c do đó khiến cho ta càng khó xác định c

Tương tự nếu $X=5\Rightarrow\sqrt{X^3+1}=3\sqrt{14}$ thì số 3 trước $\sqrt{14}$ cũng gây phiền phức.

Nên buộc lòng phải chọn số to thôi. ☺

Nhìn qua 3 kết quả ta thấy c thay đổi, $c=mX+n$, cho nên ta được 2 hệ:

$$\begin{cases}a+b=1\\4a+b=1\\6a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}\text{ và }\begin{cases}m+n=-1\\4m+n=-\frac{2}{5}\\6m+n=-\frac{2}{7}\end{cases}$$

Hệ sau vô nghiệm? Chính xác, nó vô nghiệm vì phép chia này không thực hiện được, chứ không phải vì ta giả sử $c=mX+n$ mà không chọn $c=mX^2+nX+p$ hay bậc cao hơn.

Thậm chí nhìn qua việc chỗ c có chứa phân số là đã nghi lắm rồi đấy chứ, nhưng mình vẫn thực hiện xem các bạn có phản đối gì không!!! ☺ Còn việc đặt $c=mX^2+nX+p$ thì chắc chắn là đã có người nghi tới, và đã giải thử, ra số xấu. Ngoài ra về cách tìm c kiểu bậc 2 như trên thì sau này mình sẽ cho các bạn 1 cách tìm khác nhanh hơn thế nhiều... ☺

VD2. $x^2+5x+7=7\sqrt{x^3+1}$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Giải PT này, ta được 4 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -0,9229245996 \to A \\ x_4 = 37,9229246 \to B \end{array}\right.$

2 cái nghiệm lẻ ngoác ra đấy có lẽ lại khiến các bạn hứng thú khai thác hơn 2 nghiệm đẹp kia phải không? Đơn giản vì ta dò được nhân tử $(\sqrt{x^3+1}-6x-6)$ từ nó rất dễ dàng.

Nhưng kiểu gì thì ta cũng phải thử 2 cái nghiệm đẹp kia chứ, 2 cái thì xác xuất nhân tử kiếm được là đúng sẽ cao hơn là 1 nghiệm đẹp, vì ta sẽ giải hệ PT sau:

$$\begin{cases} ax_1 + b + \sqrt{x_1^3+1} = 0 \\ ax_2 + b + \sqrt{x_2^3+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{nhân tử là } (\sqrt{x^3+1}-x-1)$$

Ở đây có 1 sự rắc rối nhất định! Vì 2 cái nhân tử này không thể đồng thời tồn tại được.

Lí do là khi nhân 2 cái nhân tử này lại ta được 1 biểu thức cồng kềnh hơn rất nhiều so với PT ban đầu, vậy làm sao PT đầu có thể phân tích thành như vậy được?

Chính vì thế, mình mới tiến hành 1 phép thử liên hợp 2 cái nhân tử kia:

$$+\ \sqrt{x^3+1}-6x-6 = \frac{x^3-36x^2-72x-35}{\sqrt{x^3+1}+6x+6} = \frac{(x+1)(x^2-37x-35)}{\sqrt{x^3+1}+6x+6}$$

$$+\ \sqrt{x^3+1}-x-1 = \frac{x^3-x^2-2x}{\sqrt{x^3+1}+x+1} = \frac{(x+1)(x^2-2x)}{\sqrt{x^3+1}+x+1}$$

Vậy cái cho ta 4 nghiệm chính là $(x^2-37x-35)$ và (x^2-2x)

Thế thì tại sao ta lại không liên hợp $(ax^2+bx+c)-\sqrt{x^3+1}=0$ để ra cái nhân tử bậc 4 là $(x^2-37x-35)(x^2-2x)$ nhỉ? ☺

Đã có trong tay 4 nghiệm, việc giải hệ bậc nhất 3 ẩn, 3 PT để tìm a, b, c là không thành vấn đề. Ngoài ra, theo giới thiệu ở cuối VD1, còn 1 cách nữa, đó là sử dụng MODE STAT,

cách này mình sẽ không làm ở đây vì các bạn không hiểu được ngọn nghành của nó, vì thế mình sẽ trình diễn lại chỗ tìm a, b, c này 1 lần nữa khi các bạn học đến MODE STAT. ☺

Lấy 1 nghiệm lẻ và 2 nghiệm đẹp để lập thành hệ, ta có 2 hệ để lựa chọn giải:

$$\begin{cases} A^2a + Ab + c = \sqrt{A^3+1} \\ 4a + 2b + c = 3 \\ c = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B^2a + Bb + c = \sqrt{B^3+1} \\ 4a + 2b + c = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

Nhưng khi giải ta sẽ giải cả 2 hệ, như thế hướng làm kia mới chắc chắn.

Tuyệt! Cả 2 hệ này đều cho $\begin{cases} a = \frac{1}{7} \\ b = \frac{5}{7} \\ c = 1 \end{cases}$, vậy ta sẽ liên hợp $\left(\frac{1}{7}x^2 + \frac{5}{7}x + 1\right) - \sqrt{x^3+1} = 0$, hay đúng hơn là $x^2 + 5x + 7 - 7\sqrt{x^3+1} = 0$

Thật buồn cười vì đây chính là PT ban đầu của chúng ta! ☺ Không ngờ nó đơn giản đến vậy mà chúng ta đã làm phức tạp hóa vấn đề! ☹

Từ đó, mình cũng nghĩ ra 1 phép thử khi gặp dạng như thế này, đó là: đối với dạng PT $f_n(x) + \sqrt{g_m(x)} = 0\,(2n > m)$ (n, m lần lượt là bậc của đa thức f(x) và g(x)) mà máy cho ta 2n nghiệm, thì có 2 cách nắm đến 99% thành công:

+ Cách 1: liên hợp toàn bộ vế trái của PT.

+ Cách 2: bình phương 2 vế! ☺

Sau đó muốn làm phương pháp gì khác thì làm (nếu 2 cách trên không ra)! ☺

Ở trên ta đã làm cách 1, có 1 điều quan trọng là 2 cách làm trên có bản chất giống nhau, do đó nếu đúng thì cùng đúng mà tắc thì sẽ cùng tắc. Vậy nếu ta bình phương 2 vế thì sẽ cũng thành công. Xem nhé.

$$PT \Leftrightarrow (x^2+5x+7)^2 = 49(x^3+1) \Leftrightarrow x^4-39x^3+39x^2+70x=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x)(x^2-37x-35)=0$$

Đấy chính là bản chất của 2 cách: có chung 2 nhân tử $(x^2-37x-35)$ và (x^2-2x)

Thậm chí trong trường hợp không nhẩm ra 4 nghiệm được như trên, thì cách bình phương vẫn chiếm ưu thế, biết vì sao không?

Bình phương lên thì điều kiện của căn mất đi, do đó cái PT sau khi bình phương đấy có thể vẫn cho 4 nghiệm, nhưng để yên mà liên hợp thì điều kiện của căn có thể đã cản bớt nghiệm đi rồi. Điều đó, như đã từng nói, tìm được càng nhiều nghiệm thì nghĩa là càng có nhiều manh mối, giải tiếp càng dễ. ☺

Thử sang VD tiếp để xem sự cố gây phức tạp hóa này có lặp lại không nhé! ☺

VD3. $16x^2-23x+10=(x+2)\sqrt{4x^2+4x-7}$

Bài này chỉ có 2 nghiệm đẹp là $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Tương tự VD2, ta tìm được nhân tử chứa chúng, là $(4x-3-\sqrt{4x^2+4x-7})$

Vậy bài này quá dễ rồi, ta tách ra cái nhân tử trên rồi liên hợp thôi, nhưng không phải là tách thành $16x^2-19x+7-(x+3)\sqrt{4x^2+4x-7}=4x-3-\sqrt{4x^2+4x-7}$ mà là tách sao cho triệt để cái căn, tức là: $12x^2-28x+16+(x+2)(4x-3-\sqrt{4x^2+4x-7})=0$ ☺

Bài này là để minh họa cho việc chỉ có 2 nghiệm hữu tỉ, loại đấy thường dễ, nhưng không thú vị! ☺

4)) PT chứa nhiều căn khác nhau

Xu hướng đề thi hiện nay là loại PT vô tỉ dạng tổng hợp có nghiệm đẹp và ít nghiệm (thường là 1). Với loại đề như vậy, máy tính sẽ bị giảm tác dụng đi nhiều đồng thời khiến học

sinh phải sử dụng tư duy, suy luận ở mức cao hơn trước đây, đó chính là mục tiêu của Bộ khi ra một cái đề.

Do đó bài ở đây chủ yếu là nghiệm đẹp. ☺

VD1. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$

Ta tìm được $x=\pm1$, nó làm cho $\sqrt{x^2-1}=0 \Rightarrow 2x+2-\sqrt{2x^2+8x+6}=\sqrt{x^2-1}=0$

Nói cách khác với $x=\pm1$ thì $2x+2-\sqrt{2x^2+8x+6}=0$

Ta lại thấy nếu liên hợp $2x+2-\sqrt{2x^2+8x+6}$ sẽ ra 1 phân thức có tử bậc 2. Tử bậc 2 mà chứa 2 nghiệm $x=\pm1$ thì là đúng rồi không còn gì phải bàn cãi nữa.

Vì đã suy luận ra thế, nên không cần phải giải hệ bậc nhất để tìm xem liên hợp căn với cái nào nữa, nó chính là $2x+2$ rồi.

Vậy: $2x+2-\sqrt{2x^2+8x+6}=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \dfrac{2(x^2-1)}{2x+2+\sqrt{2x^2+8x+6}}=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow ...$ ☺

VD2. $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

PT này cũng dễ như thế, nó chỉ có 1 nghiệm x = 2, vậy ta sẽ đem nghiệm này thử vào các căn xem giá trị bằng bao nhiêu. Ta được: $\begin{cases}\sqrt{3x^2-5x+1}=\sqrt{3(x^2-x-1)}=\sqrt{3}\\ \sqrt{x^2-2}=\sqrt{x^2-3x+4}=\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy để tạo được nhân tử $(x-2)$ một cách đơn giản nhất, ta sẽ chuyển vế rồi mới liên hợp:

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3(x^2-x-1)}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}+\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x-1)}}\right]=0$$

Okay! ☺

VD3. $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Nghiệm gồm: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{8}{7}\end{array}\right.$

Đối với 2 nghiệm đẹp thế này, ta không thử xem mỗi căn bằng bao nhiêu tại đó, mà sẽ tìm biểu thức liên hợp với mỗi căn bằng hệ bậc nhất.

Dễ dàng tìm được: $\left(\sqrt{2x^2+x+9}-\dfrac{x}{2}-3\right)$ và $\left(\sqrt{2x^2-x+1}-\dfrac{x}{2}-1\right)$ là 2 nhân tử, vậy ta phân tích: $PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+x+9}-\dfrac{x}{2}-3\right)+\left(\sqrt{2x^2-x+1}-\dfrac{x}{2}-1\right)=0$, cái này thì dễ rồi! ☺

Đề thi khối $A-2009$ cũng là 1 bài tương tự như này: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$

Dù có căn bậc 3, nhưng ta nhẩm được nghiệm $x=-2$, nên việc phân chia ra liên hợp vẫn như cũ: $PT \Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{3x-2}+2)+3(\sqrt{6-5x}-4)=0 \Leftrightarrow \dfrac{6(x+2)}{BPT}-\dfrac{15(x+2)}{\sqrt{6-5x}+4}=0$ (BPT là bình phương thiếu ☺).

3 VD là đủ rồi các bạn nhỉ?

Thực ra mình muốn đưa thêm VD để phân tích được triệt để hơn, nhưng do thời gian không cho phép, công việc bận rộn, nên mình tạm dừng mục này ở đây.

Hi vọng một lúc nào đó có thời gian mình lại sẽ nghiên cứu tiếp các kỹ thuật CASIO cùng các bạn! Có ý kiến gì đóng góp cứ liên hệ với mình qua địa chỉ Facebook đã cung cấp nhé! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Chúc các bạn nghiên cứu tốt! ☺

5. Giải hệ PT 2 ẩn

a) Hệ PT đa thức hệ số nguyên

Trong mục này chúng ta sẽ xử đẹp một số bài trong đề thi các năm trước (không nhất thiết phải là năm liền đây nhé ☺), còn lại là những bài luyện thi mình sưu tầm được.

VD1 (B - 2009). Giải hệ PT sau: $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$

Mình có 1 kinh nghiệm khi làm loại hệ này đó là hướng vào phân tích thành nhân tử, nên cái "bệnh kinh nghiệm" đó đôi khi làm mất thời gian! ☺

Cụ thể cái tư tưởng đó đã làm mình tìm ngay xem PT nào có tiềm năng phân tích thành nhân tử dễ hơn. Và dẫn đến mình đã bập ngay cái PT2 mà quên mất rằng ta có thể rút thế PT1 vào.

Thế nên bài này sẽ không dùng đến kỹ thuật phân tích đa thức 2 ẩn thành nhân tử, mà là cái khác (cái nào các bạn? ☺).

Nhận thấy rằng PT2 có những 2 cái y^2, nên ta sẽ rút x ở PT1 thế vào cho đơn giản.

Ta có: $PT1 \Leftrightarrow x = \dfrac{7y-1}{y+1} \Rightarrow PT2: y^2\left(\dfrac{7y-1}{y+1}\right)^2 + y\left(\dfrac{7y-1}{y+1}\right) + 1 = 13y^2$ (nhớ kiểm tra nghiệm $y = -1$ trước khi rút nhé).

Nhân lên: $y^2(7y-1)^2 + y(y+1)(7y-1) + (y+1)^2(1-13y^2) = 0$ (thực ra vì PT này vẫn ở dạng tuyến tính, vì thế trước đó ta có thể chỉ cần rút $x(y+1) = 7y-1$ là được).

Vấn đề còn lại là của solve, và kết quả rất tốt (đương nhiên phải thế): $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{3} \\ y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

VD2 (D - 2009). $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$

y có bậc 1 ở PT1, vậy ta có thể rút thế như bài trên.

Thông thường những bài có thể rút thế thì không phân tích thành nhân tử 2 ẩn được.

$$PT1 \Leftrightarrow y=\frac{3}{x}-x-1 \Rightarrow PT2:\left(\frac{3}{x}-1\right)^2-\frac{5}{x^2}+1=0$$

Vâng, hướng đi chuẩn, rõ ràng đề bài muốn ta đặt $\frac{1}{x}=t$, nhưng đặt hay không là quyền của mình! ☺

VD3 (A - 2011). $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \end{cases}$

Bài này thì khỏi rút rồi, trước hết các bạn hãy xem PT nào phân tích được thành nhân tử, nếu cả 2 đều không được, thì có nghĩa là mình sẽ đưa ra 1 phương cách hoàn toàn mới! ☺

PT1 phân tích không thành công, thế y = 1000 vào PT2 ta được PT bậc 3 theo x:

$1000x^3-x^2+999998000x-999998=0$, tiếp theo đó dùng EQN, thu được: $x=\dfrac{1}{1000}=\dfrac{1}{y}$

$\Rightarrow (xy-1)$ là nhân tử!

Phân tích thành nhân tử 1 ẩn trước:

$$1000x^3-x^2+999998000x-999998=(1000x-1)(x^2+999998)$$

Từ đó, cái số 999998 chỉ có thể là 1 biểu thức của y không thể có x tham gia vào được, vì nó là hệ số tự do của nhân tử $(x^2+999998)$, tức là $999998=y^2-2$

Vậy: $xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2)=0$

Việc $xy-1=0$ thì ổn rồi, vấn đề là $x^2+y^2=2$ có ổn được hay không!...

Ta sẽ không rút biến nào theo biến nào để vướng phải cái căn xấu xí, thay vào đó, ta tìm cách thế $x^2+y^2=2$ (hoặc $x^2=2-y^2$ hoặc $y^2=2-x^2$) vào PT1 thật hợp lí sao cho nó có khả năng phân tích thành nhân tử.

Nhận thấy PT1 có đến 3 vị trí chứa x^2, y^2 do đó tổng cộng có đến 7 cách để thế vào như trên, dại gì mà thử từng cái một?

Do đó trước hết chúng ta thử nhóm PT1 theo nào đó rồi mới tính đến chuyện thế. Cách nhóm có xuất hiện x^2+y^2 dễ nhận ra nhất là: $PT1 \Leftrightarrow y(5x^2+3y^2)-4xy^2-2(x+y)=0$

Bây giờ thế $x^2+y^2=2$ ta được $y(2x^2+6)-4xy^2-2(x+y)=0$

Tiếp theo đương nhiên là thử xem nó phân tích được thành nhân tử không.

Tuyệt quá! $\left[\begin{array}{l} x=2000 \\ x=\dfrac{1}{1000} \end{array}\right. \Rightarrow$ ta phân tích được: $(x-2y)(xy-1)=0$

Đến đây các bạn xử tiếp nhé! ☺

VD4 (A - 2012). $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

PT1 có điều gì đó rất là đặc biệt! ☺

Thực ra ta cảm giác đặc biệt ấy phát sinh tự sự na ná nhau của 2 vế PT1, nhưng với máy tính thì những cái đó rất ít được khai khác.

Vào MODE EQN, ta thu được 1 nghiệm duy nhất $X=1001,996004 \approx 1002 = Y+2$

Ra MODE COMP thử lại thấy đúng! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Như vậy $PT1 \Leftrightarrow (x - y - 2)(x^2 + y^2 + xy - x + y - 11) = 0$

Vấn đề băn khoăn của việc phân tích thành nhân tử như thế này là cái nhân tử thứ hai kia liệu có khó khăn để xử lí hay không, vì cái đầu $(x - y - 2)$ thì lúc nào cũng ngon rồi… ☺

Trong bài này thì vấn đề đó là đơn giản, nhưng cái khó luôn nhiều hơn cái dễ, chúng ta sẽ phải bàn lại nó trong một dịp khác…

Hệ sau chỉ cần thế vào là coi như xong:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - x + y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 - x + y) + xy - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{21}{2} \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy sự đặc biệt đã nhắc tới ở PT1 rút cục là cái gì?

Nếu quả thật sự đặc biệt trên chứa 1 hướng giải mới nào đó, thì nó phải là hướng xét hàm, vì 2 vế PT1 khá tương đồng. ☺

Ta thử hướng đó xem có ra không nhé!

Nhìn vào bậc x, y ta đoán hàm đó có lẽ là 1 hàm bậc 3 $f_3(t)$ mà $f_3(x) = f_3(y+2)$. Hơn nữa nó lại phải đơn điệu. Vậy phải chăng nó có dạng: $f_3(t) = a(t+k)^3 + c(t+k) + d$? ☺

Từ $f_3(x) = f_3(y+2) \Leftrightarrow a(x+k)^3 + c(x+k) + d = a(y+2+k)^3 + c(y+2+k) + d$. Đem đồng nhất với PT1 đã cho ta sẽ moi được a, c (d thì có vẻ là hệ số ảo! ☺).

Dễ thấy ngay a = 1, khai triển và bố trí lại ta được:

$$x^3 + 3kx^2 + (3k^2 + c)x - 6k^2 - 12k - 2c - 8 = y^3 + (3k+6)y^2 + (3k^2 + 12k + c + 12)y$$

Đồng nhất phần còn lại ta được hệ: $\begin{cases} 3k=-3 \\ 3k^2+c=-9 \\ -6k^2-12k-2c-8=22 \\ 3k+6=3 \\ 3k^2+12k+c+12=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ c=-12 \end{cases}$

Vậy nếu dùng hàm số, ta sẽ biến đổi $PT1 \Leftrightarrow (x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1)$ sau đó xét hàm $f(t)=t^3-12t$

Tiếc thay f(t) lại không phải là hàm đơn điệu! Nghĩa là nó vẫn có khả năng đơn điệu nếu ta giới hạn được khoảng chạy của t.

Để giới hạn được t, ta phải giới hạn $x-1$ và $y+1$, điều này dựa vào PT2 vì nó là đẳng cấp bậc 2.

Xét delta của tam thức bậc 2 lần lượt theo x và theo y ta được: $\left[\begin{array}{l} \Delta_x=-4y^2-4y+3\ge 0 \\ \Delta_y=-4x^2+4x+3\ge 0 \end{array}\right.$,

từ đó $\begin{cases} -\dfrac{3}{2}\le y\le \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le y+1\le \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2}\le x-1\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Và rồi suy ra $-2<t<2 \Rightarrow f'(t)=3(t^2-4)<0$, việc chứng minh đã hoàn thành! ☺

Nhìn qua thì cách dùng hàm số này có vẻ dài hơn, mất thời gian hơn cách phân tích nhân tử, nhưng thực ra 2 cách này ngang nhau thôi:

+ 1 cách thì phân tích thành nhân tử nhanh nhưng phải giải 2 hệ, và 2 hệ đó đều rất dễ.

+ Cách kia thì biến đổi thành dạng hàm số cũng nhanh (thực tế là mò bài này vẫn nhanh hơn nhiều so với cách tìm hàm bằng đồng nhất hệ số mà mình vừa làm ☺), và phải tìm điều kiện của x, y, nhưng chỉ phải giải 1 hệ.

Các bạn có thể lên Google hoặc nghiên cứu tiếp để tìm thêm 1 số cách giải khác cho bài này nếu ham khám phá, đây là 1 bài hệ khá thú vị! ☺

VD5. $\begin{cases} x^2-3y^2-xy+3x-y-1=0 \\ y^2+xy-x+3y=0 \end{cases}$

Dễ dàng thấy cả 2 PT đều không phân tích được thành nhân tử, vậy thì như đã nói ở VD3, mình sẽ sử dụng 1 phương thức hơi khác.

Phương thức này cũng là phân tích thành nhân tử, nhưng không phải là từng PT riêng biệt, mà là phân tích $f(x)=\left[\begin{matrix}(PT1)+k(PT2) \\ k(PT1)+(PT2)\end{matrix}\right.$ thành nhân tử, cái đó hầu hết người học hệ đều đã từng áp dụng.

Chúng ta có 2 cách để tìm k:

+ Cách 1: dùng máy tính dò xem với k nào thì f(x) có thể phân tích thành nhân tử. Cách này dựa vào kinh nghiệm là k nguyên và thường nhận những giá trị gần số 0

+ Cách 2: sử dụng cơ sở toán học để trợ giúp máy tính. Cách này chính xác, nhưng ta phải nhớ được công thức áp dụng: 1 công thức lạ mà thầy cô không dạy! ☺

Mình khuyên các bạn nên nắm cách 2, nhưng cũng phải biết tí cách 1 để khi quên công thức còn biết đường mà mò. ☺

Sau đây mình sẽ làm 2 cách:

⊕ Cách 1

Nhập vào máy: $f(X)=(X^2-3Y^2-XY+3X-Y-1)+A(Y^2+XY-X+3Y)$

Bấm $\boxed{SHIFT}\boxed{CALC}$, rồi cho $\begin{cases} A=1 \\ Y=1000 \end{cases}$ (loại A = 0 đi vì cả 2 PT đều đã không phân tích được thành nhân tử riêng biệt rồi), như vậy f(X) sẽ là tổng vế trái của 2 PT, ta phân tích nó thành nhân tử xem có được không…

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Vâng, không thành công!

Đơn giản chỉ việc sửa lại $A=-1$ rồi tiếp tục thử…

Chà, vẫn không phân tích được, xem ra ta phải nâng A lên "bậc 2" ☺…

Ý mình là sửa tiếp $A=2$ xem sao…

Sau hàng loạt giá trị nguyên của A được đưa vào giải, ta có thể kết luận rằng cách mò này rất mất thời gian, chủ yếu là thời gian dành cho máy giải vì biểu thức khá dài, Y lại lớn dẫn đến X phải được dò trên diện rộng.

Kì thực A trong trường hợp này không phải 1 số nguyên: $A=\frac{3}{2}$

Nói cách khác: $f(x)=2(x^2-3y^2-xy+3x-y-1)+3(y^2+xy-x+3y)$ mới chính xác là sự kết hợp của 2 PT mà có thể phân tích thành nhân tử! ☹

Vậy nếu ban đầu dùng $f(X)=A(X^2-3Y^2-XY+3X-Y-1)+B(Y^2+XY-X+3Y)$ để dò thì cũng tìm ra được, nhưng dẫu sao $\begin{cases}A=2\\B=3\end{cases}$ mà không có "quý nhân phù trợ" thì cũng lâu lắm! ☺

Đấy là hướng dẫn mò cho các bạn, bây giờ chúng ta sang cách toán học để tìm được hệ số k cho $f(x)=(PT1)+k(PT2)$

⊕ <u>Cách 2</u>

Cách này dành riêng cho dạng hệ: $\begin{cases}P_1=a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+d_1x+e_1y+f_1=0\\P_2=a_2x^2+b_2y^2+c_2xy+d_2x+e_2y+f_2=0\end{cases}$

Đặt $a=a_1+ka_2; b=b_1+kb_2; c=c_1+kc_2; d=d_1+kd_2; e=e_1+ke_2; f=f_1+kf_2$, ta được:

$P=P_1+kP_2=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Để P có thể phân tích thành nhân tử, thì từ $P = ax^2 + (cy+d)x + by^2 + ey + f = 0$ phải biểu diễn được x theo y ở dạng $x = my + n$

Nói cách khác, P phải có nghiệm x với mọi giá trị thực của y. Do đó để tìm được điều kiệu cho y ta phải dùng delta thôi (tam thức bậc 2 mà):

$$\Delta_1 = (cy+d)^2 - 4a(by^2 + ey + f) = (c^2 - 4ab)y^2 + 2(cd - 2ae)y + d^2 - 4af \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Nhận thấy Δ_1 lại là 1 tam thức bậc 2 của y, do đó để $\Delta_1 \geq 0\, \forall y \in \mathbb{R}$ thì ta cần bộ điều kiện: $\begin{cases} c^2 - 4ab > 0 \\ \Delta_2' = (cd-2ae)^2 - (c^2-4ab)(d^2-4af) \leq 0 \end{cases}$ (*)

Đến đây thì máy có thể giúp ta tìm giá trị k, vì a, b, c, d, e, f trong Δ_2' đều là các biểu thức bậc nhất của k rồi.

Để nhanh chóng tìm được k, ta sẽ giải PT $\Delta_2' = 0 \Leftrightarrow (cd-2ae)^2 = (c^2-4ab)(d^2-4af)$

Phương pháp là thế, rắc rồi vì phải nhớ công thức $(cd-2ae)^2 = (c^2-4ab)(d^2-4af)$ ☹

Bây giờ ta áp dụng.

Đặt $a = 1; b = -3+k; c = -1+k; d = 3-k; e = -1+3k; f = -1$ (may sao có 2 cái không chứa k ☺), thay vào công thức $(cd-2ae)^2 = (c^2-4ab)(d^2-4af)$ ta được phương trình bậc 4: $[(k-1)(3-k) - 2(3k-1)]^2 = [(k-1)^2 - 4(k-3)][(3-k)^2 + 4]$

Lôi máy ra giải PT này, cũng nhanh thôi: $k = \dfrac{3}{2}$ ☺

Vậy ta sẽ phân tích: $f(x) = (x^2 - 3y^2 - xy + 3x - y - 1) + \dfrac{3}{2}(y^2 + xy - x + 3y)$ hay

$f(x) = 2(x^2 - 3y^2 - xy + 3x - y - 1) + 3(y^2 + xy - x + 3y) = (x - y + 2)(2x + 3y - 1)$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

VD6. $\begin{cases} 4x - y + 3\sqrt{1+y} = 0 \\ 4\sqrt{x+y+xy+1} - 6\sqrt{1+x} + 1 = 0 \end{cases}$

Nhiều người nhìn một lúc cũng chưa chắc đã khẳng định ngay được bài này có thể áp dụng các phương pháp giải của hệ đa thức hay không đâu, nhưng nhìn thêm một xíu nữa thì nghi vấn bắt đầu hiện lên ở chỗ $\sqrt{x+y+xy+1}$ ☺

Ta nhận thấy $x+y+xy+1 = (1+x)(1+y)$, do đó đặt $\begin{cases} \sqrt{1+x} = a \geq 0 \\ \sqrt{1+y} = b \geq 0 \end{cases}$, hệ đã cho trở thành hệ đa thức quen thuộc: $\begin{cases} 4a^2 - b^2 + 3b - 3 = 0 \\ 4ab - 6a + 1 = 0 \end{cases}$

Mò ra được số k chỉ là 1 phép thử bất đắc dĩ, do đó mình sẽ không làm cái Cách 1 giống như VD5, thay vào đó:

⊕ Cách 1

$PT2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{6-4b}$ thế vào PT1 và giải tiếp: $4\left(\dfrac{1}{6-4b}\right)^2 - b^2 + 3b - 3 = 0 \Leftrightarrow ...$

⊕ Cách 2

Nhận thấy mỗi PT của hệ không thể độc lập phân tích thành nhân tử được, do đó ta sẽ kết hợp chúng lại.

Ngoài giấy nháp, đặt $A = 4; B = -1; C = 4k; D = -6k; E = 3; F = -3 + k$, lắp vào công thức $(CD - 2AE)^2 = (C^2 - 4AB)(D^2 - 4AF)$ ta được phương trình tìm k:

$$(-24k^2 - 24)^2 = (16k^2 + 16)[36k^2 - 16(k-3)] \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

Vậy vào bài làm, ta sẽ phân tích PT $4(4a^2 - b^2 + 3b - 3) + 3(4ab - 6a + 1) = 0$ thành nhân tử: $(8a - 2b + 3)(2a + 2b - 3) = 0$

Thế là ổn! ☺

Câu hỏi bình luận: có vẻ như trong hệ PT ít thấy việc nhẩm nghiệm trước khi giải nhỉ? Liệu có thể nhẩm nghiệm 2 ẩn được không? Và có cách nào mà chỉ có việc nhẩm nghiệm mới áp dụng được không?

Vâng, nhẩm nghiệm hệ PT đa thức trong đề thi Quốc gia hầu như luôn thực hiện được, có điều nó cồng kềnh vì thế xưa nay mình ít áp dụng. Nếu có nhẩm, thì mình thường mò các cặp số dễ rơi vào nhất để thử, trúng thì… chưa chắc đã giúp được gì, còn không trúng thì giải tay như thường! ☺

Chẳng hạn như VD6 ở trên, cách để nhẩm nghiệm chính là Cách 1, đưa về PT 1 ẩn rồi dùng máy tính dò: $4\left(\frac{1}{6-4b}\right)^2 - b^2 + 3b - 3 = 0$

Còn ở VD5, nhìn khó hơn nhưng thực chất là $PT2 \Leftrightarrow x = \frac{y^2+3y}{1-y}$ nên thế vào PT1 ta vẫn có PT 1 ẩn để nhẩm nghiệm: $\left(\frac{y^2+3y}{1-y}\right)^2 - 3y^2 - y\left(\frac{y^2+3y}{1-y}\right) + 3\left(\frac{y^2+3y}{1-y}\right) - y - 1 = 0$

Xét xuống VD4, có vẻ là ta không thể rút được x theo y (hoặc ngược lại)?

Không! Chỉ là rút khó, chứ không phải là không rút được. ☺

Sử dụng delta cho PT2: $x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2}$, ta rút được: $x = \frac{1 \pm \sqrt{3-4y-4y^2}}{2}$, đem cái này thế vào PT1 (chọn 1 dấu trước căn thôi nhé), ta được 2 PT để nhẩm nghiệm:

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{3-4y-4y^2}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1 \pm \sqrt{3-4y-4y^2}}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{1 \pm \sqrt{3-4y-4y^2}}{2}\right) + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y$$

Không biết máy mất bao lâu để giải PT khủng khiếp này?

Vâng, nhập PT vào còn chẳng đủ nữa tính gì đến giải! ☹

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Đấy chính là lí do tại sao mình không thích nhẩm nghiệm của hệ, dù nhẩm được thì cũng thích thật! ☺

Sở dĩ mình nói "nhẩm nghiệm hệ PT đa thức trong đề thi Quốc gia hầu như luôn thực hiện được" là vì điều kiện để rút được 1 biến theo biến kia là trong PT cần rút đó phải có ít nhất 1 biến có bậc từ 2 trở xuống, đấy là điều hầu như luôn có trong các hệ đa thức đã thi. Do đó sự thất bại hay thành công lại nằm ở cái máy! ☺

Còn về việc sử dụng nhẩm nghiệm để giải hệ, thì cũng có 1 cách, cách này sử dụng tính chất hình học: nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm của 2 đường cong có PT lần lượt là PT1 và PT2 trên mặt phẳng Oxy.

2 điểm này sẽ xác định 1 đường thẳng, và biết tọa độ 2 điểm, ta luôn tìm được PT đường thẳng đó: $ax+by+c=0$. Và đó chính là 1 nhân tử của PT sau khi phân tích. ☺

Do vậy, cách này khả dụng khi hệ có nghiệm và phải nhẩm được:

+ Ít nhất 2 nghiệm hữu tỉ.

+ Hoặc ít nhất 1 nghiệm vô tỉ.

Xem VD7 để nắm cách này nhé!

VD7. $\begin{cases} y^3+2xy^2-y^2+2x-7y-1=0 \\ 2y^2+2xy-7y+1=0 \end{cases}$

Tiến hành nhẩm: $PT2 \Leftrightarrow x=\dfrac{7y-2y^2-1}{2y}$ đem thế vào PT1 rồi cho máy giải:

$$y^3+y(7y-2y^2-1)-y^2+\frac{7y-2y^2-1}{y}-7y-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=2\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy ta thu được 3 nghiệm: $(x;y)=(2;1),\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2};2\mp\sqrt{3}\right)$

Như thế này thì không thể nào tìm sai nhân tử được! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Chiếu theo điều kiện khả dụng của phương pháp nói trên, thì ta sẽ không dùng nghiệm nguyên (2;1), vậy các bạn hãy lập PT đường thẳng đi qua 2 điểm $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};2-\sqrt{3}\right)$ và $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};2+\sqrt{3}\right)$ để tìm nhân tử.

Vâng, PT đường thẳng là $y=3-2x$, hay nhân tử tìm được là: $(2x+y-3)$

Đến đây xử lí làm sao? Ta vẫn phải tìm k để phân tích $f(x)=(PT1)+k(PT2)$ mà?

Ta nhận thấy điều này: $(PT1)+k(PT2)=0 \Leftrightarrow k=-\frac{PT1}{PT2}=-\frac{y^3+2xy^2-y^2+2x-7y-1}{2y^2+2xy-7y+1}$

Thế $y=3-2x$ vào ta được:

$$k=-\frac{(3-2x)^3+2x(3-2x)^2-(3-2x)^2+2x-7(3-2x)-1}{2(3-2x)^2+2x(3-2x)-7(3-2x)+1}=-2$$

Vậy ta sẽ phân tích PT: $(y^3+2xy^2-y^2+2x-7y-1)-2(2y^2+2xy-7y+1)=0$. Ok! ☺

Kết quả: $(2x+y-3)(y-1)^2=0$ ☺

Sang VD cuối cùng!

VD8. $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

Nhẩm nghiệm:

+ Rút từ PT2: $y=\frac{22-x^2}{2+x^2}$

+ Đem thế vào PT1: $x^4-4x^2+\left(\frac{22-x^2}{2+x^2}\right)^2-6\left(\frac{22-x^2}{2+x^2}\right)+9=0$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

+ Solve (giải khá lâu) được các nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow (x;y) = (\pm 2;3), (\pm\sqrt{2};5)$

Từ đó nhìn ngay ra được 2 nhân tử là $(y-3), (y-5)$

Ta sẽ thử từng cái một, trước hết là $y = 3$

Thế $y = 3$ vào mỗi PT của hệ ta được: $\begin{cases} x^4 - 4x^2 = 0 \\ 4x^2 - 16 = 0 \end{cases}$ (không được phép rút gọn hệ số!).

Suy ra $k = -\dfrac{PT1}{PT2} = -\dfrac{x^4 - 4x^2}{4x^2 - 16} = -\dfrac{x^2}{4}$

Vậy k đây không phải là 1 số như ta mong đợi, nhưng là biểu thức cũng đúng, và ta vẫn làm như bình thường: lấy $4(x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9) - x^2(x^2y + x^2 + 2y - 22) = 0$ đem phân tích thành nhân tử: $(y-3)(x^4 + 2x^2 - 4y + 12) = 0$ ☺

Việc $y = 5$ các bạn làm tương tự, $k = \dfrac{2 - x^2}{6} \Rightarrow$ phân tích được: $(y-5)(x^4 - 6y + 2) = 0$

Kết luận về phương pháp này:

+ Bước 1: nhẩm nghiệm.

+ Bước 2: từ nghiệm tìm liên hệ $y = mx + n$

+ Bước 3: thay $y = mx + n$ vào từng PT của hệ rồi tính $k = -\dfrac{PT1}{PT2}$

+ Bước 4: đem $f(x) = (PT1) + k(PT2) = 0$ phân tích thành nhân tử.

+ Bước 5: giải tiếp như thường. Nếu từ cái nhân tử phân tích được ở Bước 4 ta có 1 hệ mới, thì hệ đó cũng là hệ đa thức, nên quay lại Bước 2 giải tương tự. ☺

Bổ sung chót: còn 1 dạng hệ đa thức nữa dễ hơn dạng trên mà các bạn cũng có thể gặp trong đề thi, đó là $\begin{cases} a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+d_1x+e_1y=0 \\ a_2x^2+b_2y^2+c_2xy+d_2x+e_2y=0 \end{cases}$ (phân biệt cho kỹ nhé ☺).

Mình nói ra dạng này để đưa thêm 1 phương pháp giải nó có vẻ đơn giản hơn những phương pháp trên để các bạn lưu tâm, dù nó có thể giải bằng những cách trên.

+ Bước 1: xét y = 0 có phải là nghiệm hay không.

+ Bước 2: với $y \neq 0$ đặt $x = ty \Rightarrow \begin{cases} y^2(a_1t^2+b_1+c_1t)+y(d_1t+e_1)=0 \\ y^2(a_2t^2+b_2+c_2t)+y(d_2t+e_2)=0 \end{cases}$

Từ đó: $\begin{cases} y=-\dfrac{d_1t+e_1}{a_1t^2+b_1+c_1t} \\ y=-\dfrac{d_2t+e_2}{a_2t^2+b_2+c_2t} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{d_1t+e_1}{a_1t^2+b_1+c_1t}=\dfrac{d_2t+e_2}{a_2t^2+b_2+c_2t}$

Đến đây bấm máy tính ra t là xong! ☺

Phương pháp này giống phương pháp phía trên ở chỗ ta cũng cần dùng máy tính để giải 1 hệ số, đó là t

b) Hệ PT vô tỉ

Loại này khó cho nên nó được nghiên cứu nhiều và cũng vì trong đề thi nó là chủ yếu.

Loại này, gần như ngược lại hoàn toàn với hệ đa thức, đó là việc nhẩm nghiệm cực kì khó khăn, xác suất nhẩm được bằng phương pháp đưa về 1 ẩn chỉ khoảng 30% (còn nhẩm bằng cách thử từng bộ số thì hệ nào cũng như nhau ☺).

Do đó, thay vì dùng nghiệm để tìm liên hệ bậc nhất của x và y, ta dùng 1 cách khác…

VD1 (A - A1 - 2014). Giải hệ PT sau: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Rõ ràng nhìn PT2 các bạn có thể nghĩ đến việc nhẩm nghiệm vì từ nó rút được y theo x: $y=\dfrac{(x^3-8x-1)^2}{4}+2$

Cứ thử thay vào PT1 nhẩm xem có ra được nhân tử không nhé! ☺

Nghiệm nhận được rất lẻ, có khả năng là dạng căn trong căn, không truy được về dạng đẹp huống gì tìm liên hệ?

Hệ phương trình vô tỉ còn có 1 bất cập nữa là không áp dụng được phương pháp xấp xỉ để tìm nhân tử.

Nhìn qua hệ, mình đã biết ngay mối liên hệ kia phải được khai thác ở PT1, và rồi với $Y=1000$ mình bắt đầu dò X…

Kết quả là số quá lớn máy không thể nào dò ra được nghiệm.

Do đó, chúng ta phải chuyển sang phương pháp mà anh Thế Lực đã đăng! ☺

Phương pháp này chậm mà chắc, nghĩa là thay vì bộp 1 phát $Y=1000$ để tìm nhân tử sau 1 lần giải như mình (mà rõ ràng $Y=1000$ đã vi phạm điều kiện $2\le y\le 12$), ta cho y chạy lần lượt qua các giá trị nhỏ và thu thập từng giá trị x tương ứng, sau đó thống kê chúng vào 1 bảng và tìm mối liên hệ x, y

Chiếu theo các điều kiện: $\begin{cases}2\le y\le 12\\ |x|\le\sqrt{12}\end{cases}$, ta nhập PT1 vào máy, rồi giải tìm X khi cho lần lượt các giá trị Y đi từ 2 đến 12. Kết quả ta có bảng sau:

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	3,162	3	2,828	2,645	2,449	2,236	2	1,732	1,414

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Nếu không thử tiếp bằng cách bình phương các giá trị vô tỉ đó của X lên xem sao, thì các bạn sẽ không thể làm tiếp cách này. Bình các giá trị X trên rồi làm tròn kết quả, ta được bảng tiếp theo:

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Vâng, ta nhận ra được quy luật là $y = 12 - x^2$, hay $x = \sqrt{12 - y}$ ☺

Thay cái này vào PT1, ta được: $\sqrt{12-y}\sqrt{12-y} + \sqrt{(12-x^2)(12-x^2)} = 12$

Nhìn vào đây ta thấy có 1 cảm giác về sự cân xứng giữa y và $12 - x^2$ (hay giữa x và $\sqrt{12-y}$).

Sự cân xứng đó thường có mặt trong phương pháp hàm số hoặc đánh giá bằng BĐT đối xứng (hay dùng nhất là Cauchy).

Có 2 căn độc lập, do đó nếu dùng hàm số chắc chắn phải tách riêng chúng ra mỗi vế, và sau khi tách như vậy rồi thì những biểu thức còn lại, kể cả dấu, không thể nào làm cho chúng giống nhau ở 2 vế được.

Do đó ta dùng Cauchy đánh giá.

Do sau khi đánh giá, ta phải thu được $y = 12 - x^2$ và $x = \sqrt{12-y}$, do đó ta áp dụng Cauchy riêng biệt cho 2 bộ số: $x^2; 12 - y$ và $y; 12 - x^2$, chúng có sẵn bên vế trái cả rồi.

$$VT = x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = \sqrt{x^2(12-y)} + \sqrt{y(12-x^2)}$$

$$\le \frac{x^2 + (12-y)}{2} + \frac{y + (12-x^2)}{2} = 12 = VP$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y = 12 - x^2$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Như vậy coi như ổn, thay vào PT2 ta nhận được PT vô tỉ chứa 1 căn của đa thức bậc 2, đó là dạng đã học rồi! ☺

VD2 (B - 2014). $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3} \end{cases}$

PT1 căn nhỏ, biểu thức ngoài căn dạng tích nhiều, phân bố 2 vế khá đồng đều, chả bù cho PT2, do đó khả năng cao nó chứa liên hệ ta đang tìm. Vì thế, ta sẽ phân tích PT1.

Mình vẫn thử phương pháp xấp xỉ của mình trước! ☺

Nhập PT1 vào máy, cho Y = 1000, khởi tạo giá trị ban đầu X = 1500 cho máy dễ dò (vì điều kiện PT1 là $x \ge y \ge 0$), rồi chờ đợi…

Vâng, "Can't Solve"! ☹

Nhưng chưa hết đâu nhé, không 1000 thì 100 vậy, cho $\begin{cases} Y=100 \\ X=150 \end{cases}$ thử xem…

Y = 100 là giá trị ít dùng, nhưng như mình đã từng giải thích cơ chế của phương pháp xấp xỉ qua những trang sách trước đó, thì nó cũng mang tác dụng như 1000 có điều yếu hơn thôi.

Vâng, lần này X = 101, do đó ta có quyền nghi vấn mối liên hệ $x=y+1$

Giữ nguyên PT1 trên máy, mình tiếp tục nháy Solve với những bộ giá trị khác nhau tuân theo mối liên hệ trên: $\begin{cases} Y=23,4 \\ X=24,4 \end{cases}$; $\begin{cases} Y=98,56 \\ X=99,56 \end{cases}$; $\begin{cases} Y=\pi \\ X=\pi+1 \end{cases}$;… để kiểm chứng.

Phải, lần nào máy cũng hiện nguyên nghiệm là giá trị X đã gán vào, điều đó chứng tỏ $x=y+1$ là mối liên hệ đúng! ☺

Tuy vậy, vì PT1 có căn nên ta cần phải tỉnh táo lưu tâm đến 1 mối liên hệ khác nữa, đó là $\sqrt{x-y}=1$

Phương pháp anh Lực sử dụng cũng giống xấp xỉ này ở chỗ tìm X theo Y, có điều sự khác biệt lớn nhất là nó chậm mà chắc, như đã nói, do đó mình không lập bảng thử X, Y như VD1 nữa, chúng ta đi tiếp phần còn lại của bài toán.

Vế trái có $\sqrt{x-y}$, vế phải có $(x-y-1)$, theo các bạn nhân tử sau cùng sẽ là $\sqrt{x-y}=1$ hay $x-y-1=0$? ☺

Cầm bút lên và biến đổi đi nào.

$$PT1 \Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x-y}+(y-1)+(x-y-1)-(x-y-1)\sqrt{y}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(1-\sqrt{x-y})+(x-y-1)(1-\sqrt{y})=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{y})(1+\sqrt{y})(\sqrt{x-y}-1)+(\sqrt{x-y}-1)(\sqrt{x-y}+1)(1-\sqrt{y})=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{y})(\sqrt{x-y}-1)\left[(1+\sqrt{y})+(\sqrt{x-y}+1)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{y}=1 \\ \sqrt{x-y}=1 \\ \sqrt{y}+\sqrt{x-y}+2=0 \end{array}\right.$$

Phần còn lại dễ cả rồi! ☺

VD3 (A - A1 - 2013). $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 \end{cases}$

Nhìn loáng qua, người không có kinh nghiệm sẽ thử PT2 trước, vì nó "giản dị mộc mạc". Nguyên nhân cũng là do mình dạy hệ đa thức trước đó rồi nên các bạn rất tự tin với đa thức các loại.

Tuy nhiên trong hệ vô tỉ thì khả năng tìm được liên hệ nằm ở PT có căn cao hơn là ở PT đa thức.

Bài này sử dụng xấp xỉ với Y = 100 cho PT1 ra rất nhanh chóng: $X=100000001=Y^4+1$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Trong PT1 có $\sqrt[4]{x-1}$ nên liên hệ đúng có lẽ là $y=\sqrt[4]{x-1}$

Từ liên hệ đó, chúng ta dễ dàng nghĩ ngay đến liên hợp:

$$PT1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2}=y-\sqrt[4]{x-1} \Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}=y-\sqrt[4]{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt[4]{x-1})^4-y^4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}=y-\sqrt[4]{x-1} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt[4]{x-1}-y)(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}=y-\sqrt[4]{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (y-\sqrt[4]{x-1})\left[1+\frac{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}\right]=0$$

Các bạn chứng minh được $1+\dfrac{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}>0$ chứ?

Nhìn không cẩn thận nhiều người sẽ ngỡ rằng có thể kết luận luôn được điều đó rồi, nhưng thực ra rắc rối nằm ở chỗ $\sqrt[4]{x-1}+y$ đấy.

Chúng ta có cảm tưởng y dương (vì chúng ta mong như thế) khi tìm cách chứng minh nó.

Vậy điều kiện của y đây là gì?

Thú thực ban đầu mình cũng không để ý cho đến khi gặp đoạn này! ☺

Rõ ràng rất khó tìm ở PT1, nhưng PT2 thì có thể. Và khi thấy PT2 đã được đề bài sắp xếp 1 cách khéo léo đầy ẩn ý thành dạng tam thức bậc 2 của x, thì mình tin chắc rằng điều kiện của y sẽ được moi móc ra từ cái delta của tam thức này chứ không phải chỗ nào khác nữa.

Thêm nữa, nếu hệ mà có 1 PT dạng đa thức thì khả năng tìm được điều kiện (1 phần hoặc tất cả) thường nằm ở PT này.

Vậy ta đi tính delta theo x ở PT2: $\Delta_x'=(y-1)^2-(y^2-6y+1)\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 0$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Vâng, $y \geq 0$, ta đã chứng minh được $1+\dfrac{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}>0 \Rightarrow y=\sqrt[4]{x-1}$

Cách liên hợp này dành cho những người không sáng tạo cho lắm, hoặc là lo hết thời gian mà chưa nghĩ ra được cách khác.

Cũng có thể là do người đó đã chịu đựng các loại biến đổi "trâu bò" kiểu như thế quen rồi, hoặc là hay sử dụng liên hợp để giải toán.

Bởi vì thực tế thì còn cách xét hàm số làm nhanh hơn thế nhiều, có mấy dòng:

Biến đổi $PT1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt[4]{x-1})^4+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+y$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t\ (t \geq 0)$ có $f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0\ \forall t \geq 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến $\Rightarrow y=\sqrt[4]{x-1}$

Thế vào PT2 ta nhận được PT đa thức: $y(y^7+2y^4+y-4)=0$

Phương trình này các bạn đã biết cách xử, nên mình không nói thêm nữa! ☺

VD4 (B - 2013). $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} \end{cases}$

Hệ này tương tự VD6 ở mục **a)**, ta có thể đặt $\begin{cases} \sqrt{2x+y}=a \geq 0 \\ \sqrt{x+4y}=b \geq 0 \end{cases}$ để chuyển về hệ đa thức.

Nhưng nếu ở đây cũng làm thế thì hóa ra VD này rất phí: chúng ta sẽ sử dụng cách của vô tỉ.

Dễ dàng dùng xấp xỉ để phân tích PT1 thành: $(2x-y+1)(x-y+1)=0$ và như vậy đã xong được $\dfrac{1}{3}$ bài toán! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Phương pháp của anh Lực chậm mà chắc nên đôi khi nó hơi mất thời gian, do đó mình khuyên các bạn mấy điều:

+ Nên nắm cả xấp xỉ của mình lẫn lập bảng của anh ấy.

+ Với bài hệ 2 PT đều có căn, thì hãy quan tâm đến điều kiện trước khi lựa chọn phương cách nào. Vì điều kiện nhiều đôi khi làm cho xấp xỉ bị vô hiệu hóa.

+ Thông thường vẫn nên áp dụng xấp xỉ trước. Nó không mất thời gian lắm nên nếu không được thì xoay sang lập bảng suy đoán cũng mau thôi.

Chúng ta quay lại làm tiếp bài toán.

Lần lượt thay $y=2x+1$ và $y=x+1$ vào PT2, ta được lần lượt 2 PT chứa 2 căn của nhị thức bậc nhất: $3-3x=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}$ và $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

Ồ! Đây toàn dạng đã học rồi, thôi để lại cho các bạn luyện tập nhé! ☺

Vài lời kết luận: hệ vô tỉ tuy khó hơn hệ đa thức, nhưng vì nó thiên biến vạn hóa nên kỹ thuật CASIO dành cho loại này vẫn chưa có nhiều như hệ đa thức. Đặc biệt việc nhẩm nghiệm của nó thì gần như KHÔNG THỰC HIỆN ĐƯỢC với CASIO, dù nhiều người rất mong điều ấy.

Nhưng không sao, hãy giữ lấy điều mong muốn đó và tự mình nghiên cứu, chứ đừng ngồi chờ người khác.

Hãy tiếp tục nghiên cứu để đánh tan cụm từ “KHÔNG THỰC HIỆN ĐƯỢC” mà mình vừa mới nói! Cho mình thấy điều đó đi nào! ☺

III. Những kỹ thuật nhỏ khác

Nhỏ không có nghĩa là ngắn và đơn giản đâu các bạn à, chỉ là nó không phải là những vấn đề đáng quan tâm nhiều như mấy chuyên đề trong phần **II** đó thôi. ☺

Một điều khác cũng là do những kỹ thuật này ít được viết đến trong "làng thủ thuật CASIO Việt Nam", có thể các "CASIO man" chưa tìm ra và cũng có thể là họ cho rằng đây là những dạng toán không làm khó được HS hoặc HS ít khi đụng tới (đúng hơn là không muốn ☺), nhưng với một tài liệu có sức **CÔNG PHÁ** như thế này thì mình phải đề cập toàn diện, chứ còn phần này các bạn không cần phải quan tâm nghiên cứu nhiều đâu.

Cái các bạn nên tập trung là luyện kỹ thuật CASIO hệ PT, tư duy giải tay hình học Oxy và hình học không gian thuần túy.

Chúng ta bắt đầu! ☺

1. <u>Các vấn đề của tập C - số phức</u>

a) Những thao tác đặc biệt của CASIO số phức

Ở MODE mặc định của máy - COMP ($\boxed{MODE}\boxed{1}$), có 1 số thao tác sau mà rất ít người để ý:

VD1. Chuyển số phức sau sang dạng lượng giác: $z = 1 + i$

Ở MODE COMP, các bạn hãy kiếm cái phím nào có ghi "Pol" màu vàng ở cạnh nó, thì ta sẽ dùng phím đó. ☺

Vâng, là phím $\boxed{+}$ đúng không? Những chức năng ghi vàng như vậy chúng ta nhấn $\boxed{SHIFT}$ trước rồi mới nhấn đến nó (vì phím $\boxed{SHIFT}$ cũng ghi màu vàng).

Nhấn $\boxed{SHIFT}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{SHIFT}\boxed{)}\boxed{1}$, trên màn hình sẽ hiện:

$$\boxed{Pol(1,1}$$

Hết sức lưu ý dấu ngăn cách giữa 2 số 1 là dấu phẩy không phải chấm nhé, sai cái đó máy sẽ báo "Syntax ERROR" (lỗi cú pháp).

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Ấn $\boxed{=}$ thu được kết quả: $r = 1,414213562; \theta = 0,7853981634$

Đấy chính là giá trị mođun và đối số (argument) của dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Nhưng số xấu thế này làm sao lấy được? Có cách nào tách riêng được kết quả r và φ mà máy hiển thị ra 2 biến khác nhau để tìm dạng đẹp hay không?

Đừng lo, máy làm hộ ta rồi, hãy kiểm tra ngay giá trị 2 biến X, Y khi đấy, các bạn sẽ nhận được: $\begin{cases} X = \sqrt{2} \\ Y = \frac{1}{4}\pi \end{cases}$

Vậy dạng lượng giác là $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Nói chung, ở MODE COMP, cần chuyển dạng đại số sang lượng giác của số phức $z = a + bi$, ta tính biểu thức $Pol(a,b)$ (lưu ý cái dấu phẩy! ☺), sau đó mở 2 biến X, Y để xem lần lượt dạng đẹp của r và φ mà máy đã tính.

Thử VD2 để tìm sự khác biệt thấy rõ:

VD2. Chuyển sang lượng giác $w = 2 + i$

Sau khi tính $Pol(2,1)$ thu được $r = 2,236067977; \theta = 0,463647609$, ta kiểm tra 2 biến X, Y thì được 1 kết quả hơi thất vọng: $\begin{cases} X = \sqrt{5} \\ Y = 0,463647609 \end{cases}$

Đơn giản vì giá trị $Y = \arctan\frac{1}{2}$, nên chẳng có lí do gì để mà hiển thị dạng đẹp cả! ☺

VD3. Đố các bạn tìm ra nút nào để chuyển số sau về dạng đại số: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Nếu chịu khó mày mò, thì nút "Rec" sẽ nhanh chóng lòi ra thôi! ☺

Các bạn ấn $\boxed{SHIFT}\boxed{-}\boxed{2}\boxed{SHIFT}\boxed{)}\frac{\pi}{3}$, thì trên màn hình sẽ hiện: $Rec\left(2,\frac{\pi}{3}\right.$

Xong ấn $\boxed{=}$ thu được kết quả: $X=1; Y=1,732050808$

Đấy cũng chính là giá trị phần thực và phần ảo của dạng đại số, và tương tự, ta cũng mở X và Y để xem số chính xác: $\begin{cases} X=1 \\ Y=\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy dạng đại số là: $z=1+\sqrt{3}i$

Cũng như 2 VD trước, nếu số quá xấu thì máy cũng không làm rõ được dù đã mở X, Y để xem, chẳng hạn như số phức $z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Và cái số xấu ở đây hoàn toàn không thuộc dạng nghiệm của PT vô tỉ như ở phần **II** các bạn đã học đâu nhé, nên đừng cố truy dạng đẹp làm gì cho mất công (muốn thì phải giải tay), vả chăng trong đề thi chẳng ai ra quái gở như vậy cả! ☺

Kết luận: ở MODE COMP, ta sử dụng $Rec(r,\varphi)$ và 2 biến X, Y để tìm dạng đại số của số phức $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Ở MODE COMP như vậy là hết rồi. Nếu bạn nào lại sáng tạo ra được cách tính các phép tính số phức cơ bản ở MODE COMP, chẳng hạn nhân 2 số phức $z_1=1+i; z_2=1+\sqrt{3}i$ bằng cách tính $Pol(1,1)Pol(1,\sqrt{3})$, thì xin hoan nghênh bạn! ☺

Cái số $2\sqrt{2}$ mà bạn nhận được khi đấy chỉ là kết quả nhân 2 mođun (r_1r_2) của chúng mà thôi! Nhưng dù sao biết khám phá như vậy cũng là tốt! ☺

MODE COMP hết "đất" cho số phức rồi, do đó chúng ta chuyển sang $\boxed{MODE}\boxed{2}$ (CMPLX), đây là MODE chuyên biệt dành riêng cho số phức, vì vậy khá đầy đủ chức năng tính toán đơn giản, nhưng mấy cái phức tạp cần trong đề thi thì vẫn cứ thiếu! ☹

Ngoài ra đã vào đây rồi thì cái Pol với Rec ở MODE COMP kia bị khóa không thể dùng.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Mình xin giới thiệu mấy chức năng chính mà các bạn nhìn thấy khi ấn $\boxed{SHIFT}\boxed{2}$ trong MODE này:

+ 1 là "arg": viết tắt của argument, nên giúp các bạn tìm được đối số φ của dạng lượng giác. Chẳng hạn tính $\arg(1+\sqrt{3}i)$ được $\frac{1}{3}\pi$

+ 2 là "conjg": viết tắt của conjugate, là 1 chức năng không cần đến, vì nó chỉ tính cho ta số phức liên hợp mà thôi. Chẳng hạn: $Conjg(\sqrt{3}-\sqrt{6}i)=\sqrt{3}+\sqrt{6}i$

+ 3 là "$\triangleright r\angle\varphi$" thì chắc các bạn hiểu: chuyển dạng đại số sang lượng giác. Chẳng hạn tính $(1+\sqrt{3}i)\triangleright r\angle\varphi$ ta nhận được $2\angle\frac{\pi}{3}$

+ 4 là "$\triangleright a+bi$": ngược lại với 3. VD tính $\left(2\angle\frac{\pi}{3}\right)\triangleright a+bi$ thu được kết quả $1+\sqrt{3}i$ (hướng dẫn dành cho người không biết gì ☺: nhập kí hiệu "$\angle$" bằng cách ấn $\boxed{SHIFT}\boxed{(-)}$).

Cuối cùng, trong menu này tuy không có chỗ tính mođun nhưng nếu muốn tính $|2+3i|$ thì các bạn sử dụng $\boxed{SHIFT}\boxed{hyp}$ như bình thường.

VD4. Hãy tính $(2+3i)^7$ trong MODE CMPLX.

Đây là VD các bạn tự làm cho mục **a)** này! ☺

b) Lũy thừa và khai căn

Bắt đầu từ mục này sẽ tìm cách fix lỗi mấy cái hạn chế của MODE CMPLX.

Lỗi thứ nhất: máy báo "Math ERROR" khi nhập $(2+3i)^7$ để tính VD4 ở mục **a)**.

Tại sao lại thế? Rõ ràng tính $(2+3i)^2; (2+3i)^3$ vẫn cho kết quả vèo vèo mà?

Thật không hiểu lí do tại sao nhà sản xuất lại thiết kế cho máy chỉ tính được lũy thừa số phức tối đa là 3 thôi, tính từ $(2+3i)^4$ trở lên đã không được rồi (nhớ rằng ở đây là máy fx-570ES nhé).

Đấy không phải lỗi của máy nhưng đối với chúng ta thì thực sự là 1 lỗi, do đó lúc này mình xử lí đơn giản bằng cách: tính từng phần.

Tức là thay vì nhập $(2+3i)^7$, ta nhập $(2+3i)^3(2+3i)^3(2+3i)$ hoặc $\left((2+3i)^3\right)^2(2+3i)$ là ra kết quả ngon lành. Hơi mất thời gian tí, nhưng miễn đảm bảo các mũ nhập vào ≤ 3 là được.

Máy có 1 cách rất hay để các bạn biết được các bạn nhập biểu thức bị lỗi chỗ nào, đó là sau khi máy báo lỗi, nếu các bạn ấn ◁ hoặc ▷ thì sẽ thấy con trỏ nằm ngay xung quanh chỗ nhập bị lỗi, từ đó biết mà sửa lại. ☺

Lỗi thứ hai: không thể tính $\sqrt{-5+12i}$ dù rằng kết quả không xấu: $-5+12i=(2+3i)^2$. Thậm chí ta ưu đãi nhập vào $\sqrt{(2+3i)^2}$ cũng đáp lại "Math ERROR". May sao căn mọi số thực vẫn tính như thường, nhưng cái đó lại chẳng cần CMPLX làm gì.

Các bạn biết lí do của hiện tượng này không? Học số phức rồi sẽ khắc biết! ☺

Bây giờ để có được giải pháp, mình đã dựa vào công thức tổng quát lấy căn bậc n của số phức $z=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, công thức này nằm trong sách giáo khoa 12 phần đọc thêm.

Đó là nếu giả sử $w=\sqrt[n]{z}$, thì: $w=\sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right]\ (k=\overline{0;n-1})$

Như vậy số phức z bất kì sẽ có n căn bậc n khác nhau (vì có n giá trị k để thay vào công thức trên). Và đó là lí do máy không giải quyết vấn đề này vì nó không biết ta cần cái căn nào (không như số thực chỉ cần tìm 1 căn thì tự khắc biết căn còn lại).

Bây giờ ý tưởng chính là sử dụng công thức trên, nhưng sẽ nhập làm sao để giá trị k có thể dùng $\boxed{CALC}$ để cho chạy từ 0 đến $n-1$, khi đó ta sẽ thu được lần lượt được n căn của z

Do n căn đều có chung $\sqrt[n]{R}$ nên chắc chắn phải nhập $\sqrt[n]{|a+bi|}$

Phần còn lại là đối số của w, nó có chứa đối số của z nên phải có $\arg(a+bi)$

Vậy tóm lại là ta nhập biểu thức: $\sqrt[n]{|a+bi|}\angle\left(\frac{\arg(a+bi)}{n}+\frac{2\pi}{n}M\right)$, trong đó biến M ta sẽ dùng để chạy các giá trị của k

Được rồi, bây giờ tính 2 căn bậc 2 của $-5+12i$

Mình gán luôn $-5+12i \to A$ để nhập cho nhanh: $\sqrt{|A|}\angle\left(\frac{\arg(A)}{2}+\frac{2\pi}{2}M\right)$

Ấn $\boxed{CALC}$ tính biểu thức trên lần lượt với M = 0; M = 1 ta được kết quả: $2+3i; -2-3i$

Đơn giản chứ các bạn? Vấn đề của số phức trong đề thi lúc nào chả thế, vấn đề là có nhớ được biểu thức trên mà nhập hay không. Mà muốn nhớ thì phải hiểu các chức năng cơ bản mà mình đã giới thiệu, từ đó suy luận xây dựng nên.

Thử lần cuối nào: tìm các căn bậc 4 của số phức $z=-8+8\sqrt{3}i$

Số này nhập tay hơi lâu, do đó lưu $-8+8\sqrt{3}i \to A$ sau dùng cho tiện. Bây giờ nhập vào biểu thức $\sqrt[4]{|A|}\angle\left(\frac{\arg(A)}{4}+\frac{2\pi}{4}M\right)$ và ấn $\boxed{CALC}$:

+ Với M = 0 được căn thứ nhất $w_1=\sqrt{3}+i$

+ Với M = 1 được căn thứ hai $w_2=-1+\sqrt{3}i$

+ Tương tự M = 2; M = 3 thu được tiếp 2 căn đối $w_3=-\sqrt{3}-i;\ w_4=1-\sqrt{3}i$

Như thế là ổn rồi, cho phần này "Dơ eng" thôi! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

c) Giải PT số phức

Đây là cái lỗi thứ ba của CMPLX: không thể sử dụng Solve. Trong khi đó đề thi lại ít khi cho dạng đa thức bậc 2 hoặc 3 để mà dùng MODE EQN. ☹

Lỗi này hiện mình chưa fix hết được, sau đây xin đưa ra 1 cách giải PT số phức chỉ dành cho loại rất đơn giản.

VD1. Giải PT $(1+2i)(3z-i)+(2+i)(z+1)=0$

Dài nhưng z chỉ có bậc 1, rất là đơn giản.

Cầm máy tính lên và làm như sau: giả sử $z = X + Yi$, thế vào PT trên rồi nhập vào máy biểu thức: $(1+2i)(3(X+Yi)-i)+(2+i)((X+Yi)+1)$

Bấm $\boxed{CALC}$ cho X = 100; Y = 10000 ta thu được kết quả: $-69496+50700i$

Được rồi, bây giờ các bạn có đoán được mục đích (hoặc bước tiếp theo) mà mình sẽ làm hay không? ☺

Nếu còn nhớ mục **3b)** thì chắc chắn các bạn sẽ đoán trúng được phương pháp xấp xỉ mà mình sẽ áp dụng ngay dòng dưới này.

Ta tiến hành xấp xỉ: $-69496+50700i \approx -70000+50000i = -7Y+5Yi$

Quay lại sửa biểu thức thành: $(1+2i)(3(X+Yi)-i)+(2+i)((X+Yi)+1)+7Y-(5Y)i$

Biểu thức này cho giá trị mới: $504+700i \approx 500+700i = 5X+7Xi$

Do đó, ta tiếp tục sửa: $(1+2i)(3(X+Yi)-i)+(2+i)((X+Yi)+1)+7Y-5X-(5Y+7X)i$

Lần này nữa là kết thúc, kết quả cuối cùng là 4, vậy ta được:

$$(1+2i)(3(X+Yi)-i)+(2+i)((X+Yi)+1)+7Y-5X-(5Y+7X)i=4$$

Hay: $(1+2i)(3(X+Yi)-i)+(2+i)((X+Yi)+1)=5X-7Y+4+(5Y+7X)i$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Mặt khác theo bài ra ta có: $(1+2i)(3(X+Yi)-i)+(2+i)((X+Yi)+1)=0$. Do đó vào MODE EQN xử lí nốt cái hệ $\begin{cases} 5X-7Y+4=0 \\ 5Y+7X=0 \end{cases}$ là xong: $z=-\dfrac{10}{37}+\dfrac{14}{37}i$ ☺

Các bạn có hiểu lí do tại sao cách này chỉ sử dụng cho PT số phức dạng rất đơn giản như trên không, cụ thể là dùng khi thấy z có bậc 1?

Hãy "tiếp chiêu" VD sau để thấy sự "thất bại"! ☺

VD2. Giải PT số phức $(z^2+2i)(z+1-i)+2z^2=0$

Giả sử $z=X+Yi \Rightarrow$ nhập biểu thức: $((X+Yi)^2+2i)(X+Yi+1-i)+2(X+Yi)^2$

Ta nhận được kết quả: $-3,029699\times10^{10}-9,99594010\times10^{11}i\approx-3\times10^{10}-10^{12}i$

Ta thấy nếu xấp xỉ "đơn biến" thì $-3\times10^{10}=-3X^5$ là đúng chứ không thể xấp xỉ theo mình biến Y được. Nhưng có điều nhìn vào biểu thức đã nhập ta thấy X, Y đều chỉ có bậc 3 là tối đa thôi, do đó phải xấp xỉ "đa biến" (chính xác là 2 biến) mới đúng.

Cụ thể $\left[\begin{array}{l} -3\times10^{10}=-3XY^2 \\ -3\times10^{10}=-3X^3Y \end{array}\right.$. Cách hiểu ở dưới không hợp lệ, vì nhìn qua cũng thấy không có hạng tử nào có bậc lớn hơn 3

Còn $-10^{12}=-Y^3$ có thể tạm chấp nhận.

Vậy ta sửa: $((X+Yi)^2+2i)(X+Yi+1-i)+2(X+Yi)^2+3XY^2-(-Y^3)i$

Và nhận được kết quả: $-296989998+405990202i\approx-3\times10^8+4\times10^8i$

Tương tự $-3\times10^8=\left[\begin{array}{l} -3X^2Y \\ -3Y^2 \end{array}\right.$ chứ không phải là $-3X^4$, nhưng nhìn biểu thức thì mình cảm giác $-3X^2Y$ đúng hơn! ☺ Và do đó mình cũng cho luôn $4\times10^8=4X^2Y$

Tiếp tục sửa: $((X+Yi)^2+2i)(X+Yi+1-i)+2(X+Yi)^2+3XY^2+3X^2Y-(-Y^3+4X^2Y)i$

Có những cái gọi là "chuyện bây giờ mới kể" là vì bây giờ mới dùng đến, ý mình là lúc này mình mới nói thêm 1 mẹo nữa để kiểm tra xem bạn có đang đi đúng hướng trong phương pháp xấp xỉ hay không. Đó là căn cứ kết quả lần tới.

Kết quả lần này là: $3010002 + 5990202i \approx 3\times10^6 + 6\times10^6 i$

Kết quả lần tới, sau khi xấp xỉ mà thấy cái số mũ của 10 nhỏ hơn của kết quả trước đó, là 99% đang xấp xỉ đúng. ☺

Ở đây còn lại 10^6 rõ ràng nhỏ hơn 10^8 trước đó, vậy là đúng. Còn nếu nó bằng thì có nghĩa là biểu thức ta xấp xỉ ngay lần trước là đúng dạng nhưng sai hệ số nên kết quả vẫn chưa giảm mũ được. Như ở đây ta đã xấp xỉ thành biểu thức $-3X^2Y + 4X^2Yi$ là đúng cả dạng (X^2Y) lẫn hệ số (-3 và 4).

Quay trở lại nào, ta có: $3\times10^6 + 6\times10^6 i = 3XY + 6XYi$

Kết quả nhận được là $10002 - 9798i \approx 10^4 - 10^4 i = X^2 - X^2 i$

Haizz! Kết quả cuối cùng là: $2 + 202i = 2 + (2X + 2)i$

Vậy nói chung là:

$$((X+Yi)^2 + 2i)(X + Yi + 1 - i) + 2(X+Yi)^2$$
$$= X^2 + 3XY + 2 - 3XY^2 - 3X^2Y + (6XY - X^2 - Y^3 + 4X^2Y + 2X + 2)i$$

Bây giờ, giả sử mà khai triển trên là đúng ấy, thì chúng ta sẽ phải giải hệ PT sau:

$\begin{cases} X^2 + 3XY + 2 - 3XY^2 - 3X^2Y = 0 \\ 6XY - X^2 - Y^3 + 4X^2Y + 2X + 2 = 0 \end{cases}$. Còn nếu không đúng thì phí công rồi! ☹

Còn về hệ này thì, chắc khỏi giải! ☺

Thực ra việc nhìn số mũ của 10 giảm đi để đoán tính chính xác chỉ hợp với khai triển 1 biến mà thôi, thêm nữa ở đây lại có thêm sự tham gia của i, nên càng dễ sai.

Qua VD2 này, các bạn chắc đã hiểu hết lí do ta không nên áp dụng phương pháp này đối với PT số phức mà bậc z khác 1.

Mở rộng ra, nếu PT mà có chứa các đại lượng như $|z|, z.\overline{z}, ...$ thì cũng bỏ.

Trước khi làm thêm 1 VD nữa cho thành thạo, mình sẽ nói thêm mấy điều lưu ý chính của vấn đề PT số phức này.

Thứ nhất bậc cao hay thấp thì nó cũng là phần cực kì đơn giản, thậm chí còn đơn giản hơn cả phần **b)** nữa ấy chứ! ☺

Thứ 2 nếu mà bắt mình phải giải cho đúng cái VD2 kia, thì mình sẽ chơi "trò" khác chứ không phải là cái kiểu "nhọc xác" như trên nữa đâu! ☺ Trò đấy cũng là phương pháp xấp xỉ, nhưng đơn giản hơn nhiều, và sẽ được thể hiện ngay sau đây.

VD3. Giải PT $(2z+3-2i)(1+4i)-\dfrac{z+1}{1+i}=0$

Kiểu bài này thuộc loại "thùng rỗng kêu to", nhìn thế mà z có bậc 1 thôi. Do đó mình sẽ làm 2 cách, trong đó Cách thứ 2 là để minh họa cho cái "trò khác" đã nói ngay trên. ☺

⊕ Cách thứ 1

Đặt $z = X + Yi$, nhập biểu thức $(2(X+Yi)+3-2i)(1+4i)(1+i)-(X+Yi)-1$

Với $(X;Y)=(100;10000)$, ta được con số quý giá: $-100700-68979i$

Xấp xỉ nhanh: $-100700-68979i \approx -(100000+700)-70000i = -(10Y+7X)-7Yi$

Bổ sung biểu thức: $(2(X+Yi)+3-2i)(1+4i)(1+i)-(X+Yi)-1+10Y+7X-(-7Y)i$

Nhận ngay kết quả: $1021i = (10X+21)i$

Sau khi kiểm tra, kết quả trên là đúng. Vậy bước khai triển phương trình đã thành công tốt đẹp! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

$$(2(X+Yi)+3-2i)(1+4i)(1+i)-(X+Yi)-1+10Y+7X-(-7Y+10X+21)i=0$$

$$\Leftrightarrow (2(X+Yi)+3-2i)(1+4i)(1+i)-(X+Yi)-1=-7X-10Y+(10X-7Y+21)i$$

Hệ còn lại giao cho EQN: $\begin{cases} 7X+10Y=0 \\ 10X-7Y=-21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=-\dfrac{210}{149} \\ Y=\dfrac{147}{149} \end{cases} \Rightarrow z=-\dfrac{210}{149}+\dfrac{147}{149}i$

Quả thực lúc nhìn cái nghiệm mình hơi giật mình, sợ sai, nhưng rồi không sao, vì VD toàn bịa ra cả mà! ☺

⊕ Cách thứ 2

Cách này khỏi cần MODE chuyện biệt để làm gì, thích làm ở COMP hay CMPLX cũng được.

Để việc thực hành dễ dàng hơn, các bạn nên xem lại VD3 và VD4 ở mục **3b) Khai triển đa thức chứa tham số** nếu chưa nhớ.

Theo ý tưởng ở mục đó, ta sẽ dùng biến X để nhập z, biến M để nhập i sau đó khai triển nó ra, rồi sau đó giải tiếp thế nào thì tùy. ☺

Vậy ta nhập: $(2X+3-2M)(1+4M)(1+M)-X-1$ (thấy quen chứ?).

Lần này gán $(X;M)=(100;10000)$, ta nhận được: $-7,91978987\times10^{12}$

Nên nhớ M trong biểu thức trên có bậc cao nhất là 3, còn X chỉ bậc 1, đó là 1 cơ sở để ta xấp xỉ cho đúng hướng: $-7,91978987\times10^{12}\approx-8\times10^{12}=-8M^3$

Quay lại sửa: $(2X+3-2M)(1+4M)(1+M)-X-1+8M^3$

Phân tích kết quả mới: $8,02101301\times10^{10}\approx8\times10^{10}=8XM^2$

Sửa tiếp: $(2X+3-2M)(1+4M)(1+M)-X-1+8M^3-8XM^2$

Cứ thế mà làm thôi: $210130102 \approx 2\times 10^8 = 2M^2$

Kết quả sau đó: $10130102 \approx 10^7 = 10XM$ (sao dài vậy ta? ☹).

Còn lại: $130102 = 130000 + 100 + 2 = 13M + X + 2$

Chính xác rồi đó (nhờ "nguyên tắc TGTTN" cả đấy), vậy ta được:

$$(2X+3-2M)(1+4M)(1+M)-X-1 = -8M^3+8XM^2+2M^2+10XM+13M+X+2$$

Thế lại i vào M và nhóm biểu thức theo X, ta được PT sau khi khai triển là:

$$(8i^2+10i+1)x-8i^3+2i^2+13i+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{8i^3-2i^2-13i-2}{8i^2+10i+1}=-\frac{210}{149}+\frac{147}{149}i$$ ☺

Phần này phải cho kết thúc càng sớm càng tốt, phải không? ☺

2. <u>Tách tích phân hữu tỉ</u>

Số phức đã mới, tích phân càng mới hơn nữa, vì từ trước tới giờ mình lục tung Google lên mới chỉ thấy được 1 người nghiên cứu ra cái này, đó chính là Bùi Thế Việt (tất nhiên mình không dám nói là chỉ có mỗi bạn ấy trên đời này! ☺). Và kỹ thuật sau đây chính là của bạn ấy.

<u>VD1</u>. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{0}\frac{2}{x^2-3x+2}dx$

Các bạn đã học sơ sơ tích phân không thể không biết cách đơn giản nhất cho bài này chính là tách $\frac{2}{x^2-3x+2}=\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x-1}$

Và điều đó dễ dàng thực hiện trên máy tính CASIO, rất là nhanh chóng.

Để các bạn hiểu bản chất cách làm này, mình sẽ giải thích nó như sau:

Cái ta cần tìm chính là 2 hệ số a, b khi tách $\frac{2}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}$ có phải không?

Bây giờ các bạn hãy tính cho mình: $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{2}{x^2-3x+2}(x-2)\right]$?

Có phải là $\dfrac{2(x-2)}{x^2-3x+2}=a+\dfrac{b(x-2)}{x-1}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{2}{x^2-3x+2}(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to 2}\left[a+\dfrac{b(x-2)}{x-1}\right]=a$ đúng không? ☺

Tiếp theo ta lại có $\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(\dfrac{2}{x^2-3x+2}-\dfrac{a}{x-2}\right)(x-1)\right]=b$, điều này hiển nhiên rồi.

Nếu các bạn đã đồng ý thì chúng ta bước vào kỹ thuật CASIO nhé! ☺

Trước hết nhập vào máy như hình sau:

$\left(\dfrac{2}{X^2-3X+2}(X-2)\right.$

(nhất thiết phải nhập dấu ngoặc ở đằng trước! ☺)

Do ta tính giới hạn khi $x\to 2$ nên ta sẽ gán X 1 giá trị rất gần 2, cụ thể các bạn cho $X=2+10^{-8}$. Và kết quả thu được là 2

Vậy ta được hệ số đầu tiên: a = 2

Tiếp theo lại có: $\dfrac{2}{x^2-3x+2}-\dfrac{a}{x-2}=\dfrac{b}{x-1}$, do đó để tìm b, tương tự, ta quay lại biểu thức sửa nó thành: $\left(\dfrac{2}{X^2-3X+2}-2\div(X-2)\right)(X-1)$ (đây chính là lí do mình nhắc các bạn phải nhập dấu ngoặc phía trước ngay từ bước đầu ☺).

Ấn $\boxed{CALC}$, cho $X=1+10^{-8}$ ta nhận được tiếp $-1{,}99999998\approx -2=b$

Vậy: $\dfrac{2}{x^2-3x+2}=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}$ ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

VD2. Tính $J = \int_2^3 \frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}dx$

Dùng EQN, ta được $x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+2)(x+3)$, do đó ta sẽ tách ra làm 3 tích phân con: $\frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}$

Tìm a: nhập $\left(\frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}(x-1)\right.$, cho $X=1+10^{-8}$ ta được $0,1666666675$, nhìn có vẻ không chắc chắn lắm, cho X gần số 1 thêm 1 chút nữa xem sao: nhập $X=1+10^{-10}$. Lần này được $0,1666666667$, ồ số này chính là $\frac{1}{6}$

Mẹo nhỏ nè, nếu các bạn không nhìn ra được phân số nào từ $0,1666666667$, thì hãy sử dụng chức năng làm tròn của máy, nghĩa là các bạn sẽ nhập lại theo cách thủ công số 0,166666666... vào máy, nhập bao nhiêu số 6 tùy thích miễn là nó phải dài hơn màn hình hiển thị. Sau đó ấn $\boxed{=}$, máy sẽ làm tròn cho ta $a=\frac{1}{6}$ ☺

Tìm b: quay lại sửa biểu thức thành $\left(\frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}-\frac{1}{6}\div(x-1)\right)(x+2)$. Cho $X=-2+10^{-8}$ ta được $0,3333333306$, chắc là $\frac{1}{3}$, nhưng nếu chưa yên tâm có thể thử lại $X=-2+10^{-10}$ (hoặc nhỏ hơn thế nữa)... Vâng, đúng là $b=\frac{1}{3}$ rồi.

Tìm c: lại sửa thành $\left(\frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}-\frac{1}{6}\div(x-1)-\frac{1}{3}\div(x+2)\right)(x+3)$. Cho luôn $X=-3+10^{-10}$ cho yên tâm, ta được: $-0,4999999999\approx-\frac{1}{2}=c$

Cuối cùng kiểm chứng biểu thức: $\frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}-\frac{1}{6}\div(x-1)-\frac{1}{3}\div(x+2)+\frac{1}{2}\div(x+3)$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Kết luận: $\dfrac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}=\dfrac{1}{6(x-1)}+\dfrac{1}{3(x+2)}-\dfrac{1}{2(x+3)}$ ☺

Rất nhanh, phải không? ☺

Các bạn có thắc mắc liệu ta phải làm như thế nào nếu như đa thức bậc 3 ở mẫu kia có dạng $(x-x_0)(mx^2+nx+p)$ mà tam thức mx^2+nx+p lại vô nghiệm, khi đó tách làm sao được?

Vâng, vấn đề đó cũng đơn giản thôi!

VD3. Tính tích phân $K=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x-3}{x^3-3x^2+3x-2}dx$

Đúng vấn đề đang nói: $x^3-3x^2+3x-2=(x-2)(x^2-x+1)$. Thực ra thì dạng nó thay đổi là chính thôi chứ phương pháp thì cũng tương tự: $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-3x^2+3x-2}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$

Tìm a: gán $X=2+10^{-10}$ cho biểu thức $\left(\dfrac{X^2+2X-3}{X^3-3X^2+3X-2}(X-2)\right.$ ta được "số đẹp" $1,666666667$, tức $a=\dfrac{5}{3}$

Tìm b, c thì lại không như thế. Bởi vì ta có $bx+c=(x^2-x+1)\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-3x^2+3x-2}-\dfrac{a}{x-2}\right)$ nên mình nghĩ ngay đến việc: xấp xỉ.

Gán X = 1000, thì biểu thức $\left(\dfrac{X^2+2X-3}{X^3-3X^2+3X-2}-\dfrac{5}{3}\div(X-2)\right)(X^2-X+1)$ cho ta giá trị $-\dfrac{1993}{3}=-\dfrac{2X-7}{3}$

Vậy: $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-3x^2+3x-2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{-2x+7}{x^2-x+1}\right)$ ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

VD4. Tính tích phân $L=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^4+x^3+3x^2+x+2}dx$

Ứng dụng phương pháp phân tích nhân tử đa thức bậc 4 vô nghiệm đã học, ta phân tích được $x^4+x^3+3x^2+x+2=(x^2+1)(x^2+x+2)$

Vậy có nghĩa là phải tách: $\frac{x^3+1}{x^4+x^3+3x^2+x+2}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+2}$

Cái khó nhất bắt nguồn từ việc mẫu bị vô nghiệm như vậy. Liệu có thể xấp xỉ được như VD3 nữa không?

Nghĩ cách nào đó có dùng xấp xỉ có vẻ khó, nhưng nếu chúng ta chịu khó quay lại và cố lục lại hướng đi tưởng như đã bị tắc giống Bùi Thế Việt đã làm, thì chắc các bạn cũng sẽ nghĩ ra.

Hướng đi đó chính là sử dụng nghiệm của mẫu như các VD trước đã làm! Nghiệm thực thì cả làng tắc rồi, nhưng chúng ta còn nghiệm phức, phải không? ☺

Nghiệm của $x^2+1=0$ là $\pm i$, thích cái nào thì dùng.

Như vậy ta có: $ai+b=\lim_{x\to i}\left[\frac{X^3+1}{X^4+X^3+3X^2+X+2}(X^2+1)\right]$

Nhập máy biểu thức: $\left(\frac{X^3+1}{X^4+X^3+3X^2+X+2}(X^2+1)\right.$ rồi cho $X=i+10^{-10}$ thu được $-1{,}5\times10^{-10}-0{,}9999999999i$, từ đó suy ra $a=-1; b=0$ ☺

Khoan đã, vừa rồi các bạn có làm được như mình hay không? Hay là cho $X=i+10^{-10}$ xong máy báo "Math ERROR"? ☺

Vậy hãy để ý xem các bạn đã nhập lỗi chỗ nào nhé, nhấn quay lại sau khi máy báo lỗi là thấy. Con trỏ nằm ngay vị trí mũ của X^4 phải không, nghĩa là lỗi ở cái số mũ đó.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Nên nhớ rằng biến X của ta chứa số phức, và theo như mục **1b)** thì khi tính lũy thừa số phức không được phép nhập số mũ quá 3, đó là lí do tại sao máy báo lỗi toán học (Math ERROR), thay vì lỗi cú pháp (Syntax ERROR).

Sửa lại đơn giản: $\left(\dfrac{X^3+1}{X^3X+X^3+3X^2+X+2}(X^2+1)\right.$ là ổn! ☺

Vậy ta sẽ xấp xỉ cho biểu thức $\left(\dfrac{X^3+1}{X^3X+X^3+3X^2+X+2}+X\div(X^2+1)\right)(X^2+X+2)$ để tìm nốt c, d

Cụ thể cho X = 1000, ta được 2001 = 2X + 1, tức c = 2; d = 1

Kết luận: $\dfrac{x^3+1}{x^4+x^3+3x^2+x+2}=\dfrac{-x}{x^2+1}+\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}$

Bình luận: cách dùng nghiệm phức này có 1 bất ổn, đó là nghiệm phức mà phức tạp như bài sau đây thì việc dò hệ số từ kết quả khá mất thời gian:

VD5. Tính tích phân $I=\int_0^1\dfrac{x^3+1}{x^4+2x^2-x+2}dx$

Cho trước $x^4+2x^2-x+2=(x^2+x+2)(x^2-x+1)$ và nghiệm của 2 nhân tử (x^2+x+2) và (x^2-x+1) lần lượt là $\pm\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$ và $\pm\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, rồi bây giờ các bạn tự mình thử theo cách trên để thấy sự bất lợi của nó nhé.

Từ đó các bạn tự rút ra kinh nghiệm khi lựa chọn hướng làm cho phù hợp: theo hướng nghiệm phức hay là quay lại làm theo cách làm truyền thống.

Cách truyền thống là quy đồng lên, thay vài giá trị X để lập hệ bậc nhất, rồi giải.

Nó khá đơn giản thôi, thậm chí cách nghiệm phức mà mắc phải nghiệm cồng kềnh thì còn bị nó vượt mặt đấy chứ. ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Giữ gìn và phát huy truyền thống thì ai cũng phải biết, thế nhưng không biết các bạn đã phát huy nó được thêm tí nào chưa nhỉ? ☺

Hướng tách: $\dfrac{x^3+1}{x^4+2x^2-x+2}=\dfrac{ax+b}{x^2+x+2}+\dfrac{cx+d}{x^2-x+1}$

Quy đồng lên ta được: $x^3+1=(ax+b)(x^2-x+1)+(cx+d)(x^2+x+2)$

Đến đây thông thường là thay 4 giá trị x khác nhau để lập hệ 4 ẩn, phải không? Nhưng nếu để ý tí thì chỉ cần 2 giá trị thôi.

Cụ thể nhìn liếc qua hệ số bậc cao nhất và thấp nhất của 2 bên, rồi đồng nhất lại, ta được: $\begin{cases} a+c=1 \\ b+2d=1 \end{cases}$. Tiếp theo thay ngược cái này vào đẳng thức:

$$x^3+1=[ax+(1-2d)](x^2-x+1)+[(1-a)x+d](x^2+x+2)$$

Vậy chỉ cần 2 giá trị x là được cái hệ 2 ẩn. Đấy chính là 1 bước nhỏ của việc phát huy truyền thống! ☺

Ngoài ra mình cũng không có gì để nói thêm cho mục này nữa! ☺

3. <u>Hình học giải tích</u>

Mục này mới thực sự là mới nhất! ☺ Chứ tích phân thì cũng không phải là lạ lắm.

Thực ra vì mới khai phá, nên sự phục vụ của CASIO đối với các lĩnh vực hình học vẫn còn thô sơ lắm, và đặc biệt phải là loại hình học có chứa số liệu, chứ hình học thuần túy chỉ có tư duy hình ảnh thì vẫn còn tắc.

Hi vọng trong tương lai các bạn sẽ nghiên cứu ra kỹ thuật CASIO áp dụng trong việc tư duy, suy luận bài toán hình học thuần túy. ☺

Mục này chủ yếu là áp dụng chức năng có sẵn của các MODE số 3; 5; 8. Chúng ta sẽ đi vào cụ thể 2 loại mới lạ nhất, trừ MODE thứ 5 - EQN, lí do tại sao thì khỏi phải nói.

a) MODE STAT

Trước tiên các bạn nhấn $\boxed{MODE}\boxed{3}\boxed{AC}$ để thấy chữ "STAT" nhỏ xíu, rồi mình nói tiếp.

Đây là MODE giải toán thống kê, loại toán không có trong đề thi Quốc gia (tính đến năm 2015 ☺), do đó mình chỉ khai thác khía cạnh phục vụ cho hình học phẳng Oxy mà thôi.

Có phải khi các bạn nhấn $\boxed{MODE}\boxed{3}$ thì màn hình hiện như thế này phải không:

$1:1-VAR$	$2:A+BX$
$3:_+CX^2$	$4:\ln X$
$5:e\wedge X$	$6:A\cdot B\wedge X$
$7:A\cdot X\wedge B$	$8:1/X$

Khó hiểu nhỉ? Các bạn đã khám phá nó bao giờ chưa?

Nếu chưa, xin mời các bạn đọc lại 1 bảng trong sách hướng dẫn sử dụng máy tính CASIO fx-570ES (loại cao hơn tương tự):

■ Các kiểu tính thống kê

Phím	Mục menu	Tính thống kê
1	1–VAR	Biến đơn
2	A+BX	Hồi quy tuyến tính
3	... + CX^2	Hồi quy bậc hai
4	lnX	Hồi quy logarit
5	e^X	Hồi quy số mũ cơ số e
6	A×B^X	Hồi quy số mũ cơ số B
7	A×X^B	Hồi quy lũy thừa
8	1/X	Hồi quy nghịch đảo

Các bạn khỏi cần tra xem chữ "Hồi quy" là cái quái gì (biết rồi càng tốt), mình sẽ hướng dẫn luôn trong các VD và các bạn sẽ biết nó là cái "quái" gì ngay thôi! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

VD1. Lập PT đường thẳng đi qua 2 điểm: $A(2;3), B(-1;5)$

Bấm [MODE] [3] [2] (nghĩa là tiến hành sử dụng cái thứ 2 trong bảng trên), máy sẽ hiện:

	X	Y	
1			
2			
3			

(Mình tạo hình không được đẹp cho lắm! ☺)

Trong bảng này các bạn nhập vào lần lượt hoành độ X, tung độ Y của 2 điểm A, B, như hình sau:

	X	Y	
1	2	3	
2	−1	5	
3			

(Nhớ nhập đúng chỗ nhé)

Vì ta đã chọn chức năng thứ 2 trong bảng trên là "Hồi quy tuyến tính", tức A + BX, nên từ những số liệu này, sau quá trình hồi quy máy sẽ cho ta 1 phương trình đường thẳng có chứa 2 điểm A, B này, và đó chính là phương trình cần lập. Nó có công thức theo đúng như trong bảng chức năng đã ghi rõ, tức là $y = A + BX$ (cẩn thận nhé, không phải là $y = AX + B$).

Bây giờ, quá trình hồi quy vừa mới nói diễn ra ở đâu và làm sao để xem được?

Các bạn [AC] tắt bảng dữ liệu vừa nhập đi, và bấm [SHIFT] [1] [7], màn hình sẽ hiện một cái menu lạ hoắc... ☺

Để xem hệ số A trong phương trình $y = A + BX$, các bạn nhấn [1] chọn tiếp cái đầu tiên (là A phải không?). Sau đó ấn [=].

Ta được $A = 4,333333333$, tiếp 1 phát phím [$S \Leftrightarrow D$] để nhận được số đẹp $\frac{13}{3}$

Tương tự để xem nốt B, các bạn lại $\boxed{SHIFT}\boxed{1}\boxed{7}$ vào menu lúc nãy, rồi chọn cái thứ 2, là B thôi.

Ấn $\boxed{=}\boxed{S \Leftrightarrow D}$ được $B = -\frac{2}{3}$

Thay vào phương trình $y = A + BX$ ta được kết quả PT đường thẳng cần lập là:

$y = \frac{13}{3} - \frac{2}{3}x \Leftrightarrow 2x + 3y - 13 = 0$

Quá trình hồi quy hiểu nôm na là đi tìm công thức chung.

Nghĩa là từ tọa độ 2 điểm A, B mà các bạn nhập vào, máy sẽ tiến hành tìm công thức chung liên hệ giữa X và Y cho 2 điểm này, và mối liên hệ đó chỉ có thể là PT đường thẳng AB mà thôi.

Và vì kết quả hồi quy là 1 PT đường thẳng, nên mới gọi là hồi quy tuyến tính.

Từ đó, nhìn lại bảng liệt kê chức năng ở trong sách hướng dẫn được trích phía trên, các bạn có thể tự suy luận ra các kiểu hồi quy còn lại là như thế nào rồi đấy.

Vậy đương nhiên sẽ có 1 thắc mắc: nếu nhập thêm điểm C vào bảng dữ liệu hồi quy đấy, liệu nó có thể cho ta PT đường thẳng được không?

Giả sử lấy điểm $C(-2;1)$ bất kì, các bạn mở lại bảng dữ liệu trên bằng cách nhấn $\boxed{SHIFT}\boxed{1}\boxed{2}$, nhập thêm tọa độ điểm C xuống dưới cùng:

	X	Y	
1	2	3	
2	-1	5	
3	-2	1	

(đáng lẽ mình không phải vẽ hình nữa)

Rồi quay lại làm lại các bước trên để kiểm tra A, B xem sao...

Có phải phương trình mới là $y=\frac{40}{13}+\frac{3}{13}x$? Tuy nhiên PT này lại không hề chứa điểm nào trong cả 3 điểm trên.

Lí do thứ nhất là điểm C ta chọn bất kì kia vốn dĩ không hề thuộc đường thẳng AB có PT $2x+3y-13=0$ đã tìm, nên chẳng có thánh nào có thể lập nổi cái PT đường thẳng đi qua được 3 điểm đó cả! ☺

Còn việc máy vẫn cho kết quả $y=\frac{40}{13}+\frac{3}{13}x$: đấy không phải là nó hiển thị bừa bãi, mà là tại cái lí do thứ 2 của toán thống kê mà các bạn không cần tìm hiểu làm gì. ☺

Vậy nếu ta thay đổi C đi, chẳng hạn $C(5;1)$ (lần này đúng là 3 điểm thẳng hàng rồi), các bạn quay lại bảng nãy sửa dữ liệu điểm C đi rồi xem kết quả thay đổi thế nào...

Vâng, kết quả lại giống như PT thứ nhất: $2x+3y-13=0$

Vậy ta có 2 kết luận:

+ KL 1: nếu dữ liệu nhập chỉ có 2 điểm A, B, máy sẽ cho phương trình đường thẳng AB.

+ KL 2: nếu dữ liệu có điểm thứ 3 C, mà PT nhận được khác PT AB, suy ra 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Còn nếu vẫn nhận được PT AB như cũ, chứng tỏ A, B, C thẳng hàng.

VD2. Lập PT parabol đi qua 3 điểm: $A(2;3), B(-1;5), C(-2;1)$

Các bạn có dò lại được câu kết của cái VD1 thuộc mục **4c)3)) <u>Phân tích PT</u> vô tỉ chứa 1 căn của đa thức bậc cao** không?

Mình đã nói là: "về cách tìm c kiểu bậc 2 như trên thì sau này mình sẽ cho các bạn 1 cách tìm khác nhanh hơn thế nhiều", và cách làm đó sẽ được sử dụng trong VD2 này. ☺

Khi phân tích PT vô tỉ mình cũng hay sử dụng cách này, nó chỉ bất lợi ở chỗ phải đổi từ MODE COMP (dùng để giải PT) sang MODE STAT mà thôi.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Nguyên lí dùng giống VD1, có điều thay vì chọn [MODE] [3] [2], ta chọn [MODE] [3] [3], để sử dụng "Hồi quy bậc hai" - tìm PT có dạng $y = A + Bx + Cx^2$ (các bạn đừng thắc mắc tại sao cái PT nó lại "trái khoáy" như vậy nhé, cái đó tại nhà sản xuất và mình cũng không có ý kiến gì thêm! ☺).

Hoặc có thể nhấn [SHIFT] [1] [1] [3] để mở nếu đang để sẵn MODE STAT rồi.

Và cái bảng dữ liệu hiện ra y hệt như hồi quy tuyến tính:

	X	Y	
1			
2			
3			

Hình thức nó giống nhau vì cách nhập liệu không có gì khác, nhưng bản chất chức năng đã khác nhau rõ ràng.

Các bạn hãy tự khám phá ra hướng làm tương tự như VD1 xem nào! ☺

Nếu kết quả PT parabol là $y = \frac{20}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^2$ thì là đúng.

Tương tự VD1, sau khi nhập xong dữ liệu, ta tắt bảng đi rồi ấn [SHIFT] [1] [7] rồi lần lượt chọn [1], [2], [3] để xem A, B, C.

Và hãy nhớ cái PT máy nó cho là $y = A + Bx + Cx^2$ chứ không phải là $y = Ax^2 + Bx + C$ như lâu nay vẫn thấy trong sách, viết trong vở. ☺

Cuối cùng, giống như VD1, nếu các bạn có thêm điểm D mà muốn kiểm tra xem nó có thuộc parabol đi qua A, B, C hay không, thì ta cũng sử dụng cái PT lập được từ 4 điểm A, B, C, D. Nếu nó giống PT như khi dữ liệu chỉ có A, B, C thì thuộc, ngược lại thì không.

Các dạng hồi quy còn lại trong bảng chức năng đã nêu các bạn thích thì vọc, không thì thôi! ☺ Vì phần hình phẳng trong đề thi ở MODE này theo mình chỉ có nấy thôi.

b) MODE VECTOR

MODE này thì hẳn nhiều người biết hơn, nên mình sẽ không nói nhiều, vì khi học những cái liên quan đến phép tính vector trong hình học giải tích Oxyz thì các bạn cũng đều được khám phá, bắt nguồn từ việc tính tích có hướng.

Khi các bạn nhấn [*MODE*] [8], màn hình xuất hiện 3 vector A, B, C để lựa chọn, thích cái nào thì dùng.

Giả sử mình bấm [1] chọn vector A, máy lại hỏi tiếp là muốn chơi Oxyz hay Oxy! ☺

Thông thường MODE này chúng ta chỉ dùng tính tích có hướng thôi, cho nên mình chọn tiếp [1] tức chọn loại vector có 3 chỉ số tọa độ (trong không gian Oxyz mà).

Bây giờ màn hình hiện như thế này thì ta cứ nhập vào 3 tọa độ của vector $\vec{a}(1;2;3)$ như bình thường thôi:

^{A}[	1	2	3]
			3

Vậy ta đã nhập xong 1 vector.

Nhưng 1 cái thì làm được gì, muốn thêm vector $\vec{b}(2;-1;1)$ vào, các bạn nhấn tiếp [*SHIFT*] [5] [1] rồi chọn [2] (vector B), rồi nhập thông tin như thường.

Nhấn [*SHIFT*] [5] chính là mở cái menu chức năng của MODE này, ở đó các bạn có thể thấy 3 cách để xem lại dữ liệu đã nhập vào 1 vector nào đó. Cách 1 là chọn [2] (Data), rồi chọn vector muốn xem. Cách 2 là chọn trực tiếp vector muốn xem trong số 3 phím [3]; [4]; [5] (tương ứng 3 vector A, B, C), rồi [=]. Cách ngại dùng nhất là [*SHIFT*] [5] [1] [1] [1]. ☺

Bây giờ đến khoản tính tích có hướng $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$

Trong máy tính, phép tính này được viết như 1 phép nhân bình thường, nghĩa là chỉ cần nhập vào màn hình $VctA\times VctB$ rồi nhấn $\boxed{=}$ là xong. Thao tác nói chung có 8 phím:

$\boxed{SHIFT}\boxed{5}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{SHIFT}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{=}$

Kết quả nhận được là $\vec{n}(5;5;-5)$, rất đẹp! ☺

Trong menu vừa rồi các bạn thấy phím thứ 7 là chức năng "Dot" có phải không? Cái đó chính là tính tích vô hướng.

Cụ thể nhập vào: $VctA\cdot VctB$ rồi $\boxed{=}$, ta được tích vô hướng là 3

Vậy là đã xong cái MODE thứ hai. ☺

c) Sáng kiến giải hệ bậc nhất 4 PT 4 ẩn

Tại sao cái này lại nằm ở phần hình học?

+ Thứ nhất bên đại số không có chỗ nào cho nó "sống" cả.

+ Thứ hai: thỉnh thoảng trong bài hình giải tích Oxyz ta lập PT mặt cầu hay mặt phẳng đi qua 1 số điểm cho trước (mà các bạn đều biết mấy PT đó đều có 4 hệ số phải tìm), tuy không nhiều, nhưng nó cũng là hệ PT bậc nhất 4 ẩn 4 PT, mà ta cần giải.

VD1. Giải hệ PT: $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-z-2t=1 \\ y+2z-3t=2 \\ x+y+t=-1 \end{cases}$

Trước hết ta loại đi phương trình phức tạp nhất trong hệ, theo mình là PT thứ 3, vậy ta còn lại hệ: $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-z-2t=1 \\ x+y+t=-1 \end{cases}$ ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Mình không có ý định sáng tạo 1 phương pháp "số đếm" cho giải hệ PT loại này đâu, thực chất vẫn chỉ là xấp xỉ "cố hữu" mà thôi. ☺

Tiếp theo mình thế $t = 1000$ vào cái hệ mới ở trên, thu được 1 hệ mới hơn nữa:

$$\begin{cases} x + y + z = -1000 \\ 2x - z = 2001 \\ x + y = -1001 \end{cases}$$

Bây giờ mình sử dụng EQN, nghiệm thu được ứng dụng phương pháp xấp xỉ để biểu diễn lại các biến x, y, z theo t: $\begin{cases} x = 1001 = t + 1 \\ y = -2002 = -2t - 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Bấy giờ, thế hết x, y, z theo t ở trên vào cái PT ta đã bỏ đi ở hệ ban đầu, ta được PT bậc nhất 1 ẩn t: $(-2t - 2) + 2 - 3t = 2 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{6}{5} \end{cases}$

Kết luận: nghiệm là $(x; y; z; t) = \left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}; 1; -\frac{2}{5}\right)$

Vậy từ 1 hệ PT bậc nhất 4 ẩn, 4 PT ta đã quy về 1 hệ PT bậc nhất 3 ẩn 3 PT và 1 PT bậc nhất riêng lẻ, thông qua phương pháp xấp xỉ.

Ý tưởng của mình khởi nguồn từ câu hỏi đầu tiên là: làm sao giải được hệ 4 ẩn bằng cách dùng EQN. ☺

Để "giải trí" thêm chút nữa, mời các bạn giải thử VD2! ☺

VD2. Giải hệ sau: $\begin{cases} 2x - y + 2z - 5t = 1 \\ x + 7y + z - 4t = 0 \\ y - z - t = 3 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Vứt luôn cái PT đầu tiên đi, rồi thế t = 1000, ta được hệ mới: $\begin{cases} x+7y+z=4000 \\ y-z=1003 \\ x+y+4z=1 \end{cases}$

Giải hệ này ta thu được: $\begin{cases} x=2363=\dfrac{7089}{3}=\dfrac{7t+89}{3} \\ y=330=\dfrac{990}{3}=\dfrac{t-10}{3} \\ z=-673=-\dfrac{2019}{3}=-\dfrac{2t+19}{3} \end{cases}$

Thế nó vào PT đầu tiên của hệ gốc: $2\left(\dfrac{7t+89}{3}\right)-\dfrac{t-10}{3}+2\left(-\dfrac{2t+19}{3}\right)-5t=1 \Leftrightarrow t=\dfrac{49}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{521}{6} \\ y=\dfrac{29}{6} \\ z=-\dfrac{68}{3} \end{cases}$

Cái chỗ mình thấy lo nhất chính là chỗ xấp xỉ $x=\dfrac{7t+89}{3}$, nhìn nó không được chắc chắn như y với z, nhưng cuối cùng, thử cũng chính xác, nếu không đúng thì sửa lại thôi. ☺

Cái việc làm sao để xấp xỉ cho đúng, thì ngoài việc học các kỹ thuật và linh hoạt ra, còn phải tập nhiều bài nó dày dạn kinh nghiệm. Còn về 1 số lưu ý để xấp xỉ chính xác thì mình đã cho các bạn thấy trong những lần sử dụng trước đó, nên sẽ chẳng cần thêm VD3 làm gì nữa. ☺

Như vậy nếu thêm 1 ẩn nữa thì vẫn có thể giải được bằng phương pháp trên, đó là ấn từ 5 ẩn xuống 3 ẩn bằng cách thế 2 ẩn bất kì lần lượt là 1000 và 1000000 (!), hoặc 100 và 10000, rồi cũng xấp xỉ. ☺ Có điều sẽ không có bài nào 5 ẩn cả.

Nhưng 6 ẩn thì thôi rồi, kết thúc luôn!

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

4. Chứng minh bất đẳng thức đối xứng

Đây là vấn đề không phải là nhỏ mà là không chịu học, ai cũng biết thế, và ước mơ 9đ có lẽ là nhiều đối với những bạn học khá, thậm chí là giỏi Toán.

Bởi thế, mình cũng không khuyến khích các bạn học nhiều cái này làm gì, và kỹ thuật ở đây cũng không giúp được nhiều gì, bởi vậy các bạn cần phải học lấy những kiến thức thuần túy (không có máy tính).

Việc học BĐT trong đề thi THPT Quốc gia không phải là khó lắm vì nó không vô tận và kinh khủng như bản chất toàn vẹn của BĐT Toán học, nó chỉ có mấy phương pháp chính như ứng dụng 2 BĐT cơ bản (Cauchy, Bunhia), và đưa về 1 biến rồi đạo hàm, hiếm khi người ta ra khủng.

Có người thầy đã từng nói: phương pháp tốt nhất để học tốt tích phân là học công thức và đọc thật nhiều bài giải sẵn. Theo mình để các bạn có khả năng làm được BĐT trong đề thi này, thì ngoài áp dụng tốt 2 BĐT cơ bản cũng phải đọc thêm nhiều bài giải sẵn nữa.

Bây giờ ta đi vào vấn đề chính, sử dụng phương pháp tiếp tuyến c/m BĐT đối xứng. ☺

Dạng toán thường áp dụng tiếp tuyến là như sau: cho $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$, chứng minh rằng $P = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq m$ (hoặc có thể bắt tìm $\min P$). Chiều ngược lại c/m tương tự.

Với BĐT đối xứng, thông thường điểm rơi (là bộ giá trị của biến để dấu "=" xảy ra) là giá trị của tất cả các biến bằng nhau, cụ thể dạng này ta dự đoán điểm rơi là $x_i = \frac{k}{n} \ (i = \overrightarrow{1;n})$.

Và phương pháp tiếp tuyến sẽ được áp dụng theo các bước sau:

+ Bước 1: lập PT tiếp tuyến $y = px_i + q$ của hàm số $y = f(x_i)$ tại điểm có hoành độ $x_i = \frac{k}{n}$ (trong đó $i = \overrightarrow{1;n}$).

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

+ Bước 2: c/m $f(x_i) \geq px_i + q$ với dấu "=" xảy ra tại $x_i = \frac{k}{n}$

+ Bước 3: cộng vế rồi kết luận: $P \geq p(x_1 + x_2 + ... + x_n) + nq = pk + nq$

VD1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Ta viết lại BĐT: $\frac{1}{a^2} - a^2 + \frac{1}{b^2} - b^2 + \frac{1}{c^2} - c^2 \geq 0$, như vậy là đúng dạng áp dụng tiếp tuyến của chúng ta: $P = f(a) + f(b) + f(c) \geq 0$

Dự đoán điểm rơi: $a = b = c = 1$

Ở ngoài giấy nháp, ta giả sử $f(a) \geq pa + q$, bây giờ làm sao sử dụng máy tính để tìm p với q đây?

Đơn giản, vì $y = pa + q$ là PT tiếp tuyến đồ thị $y = f(a)$ tại a = 1, nên $\begin{cases} p = f'(1) \\ q = f(1) - p \end{cases}$

Cầm máy tính lên và sử dụng chức năng tính đạo hàm tại điểm: nhấn $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{\int_\square^\square \square}$ trên màn hình sẽ hiện ra $\frac{d}{dx}(\square)|_{x=\square}$, đúng thế không?

Muốn tính $f'(1)$, ta nhập biểu thức hoàn chỉnh là $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{X^2} - X^2\right)\Big|_{x=1}$ rồi nhấn $\boxed{=}$, vậy ta thu được $p = -4$, từ đó $q = f(1) - p = 4$

Bây giờ trình bày bài làm: ta sẽ đi chứng minh $\frac{1}{a^2} - a^2 \geq -4a + 4$ ...

Phần việc của máy tính đến đó hết rồi, còn lại các bạn tự c/m tiếp.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Tương tự ta cũng có $\frac{1}{b^2}-b^2\geq -4b+4;\frac{1}{c^2}-c^2\geq -4c+4$

Cộng vế các BĐT lại ta được:

$\frac{1}{a^2}-a^2+\frac{1}{b^2}-b^2+\frac{1}{c^2}-c^2\geq -4(a+b+c)+12=-4.3+12=0\ (dpcm)$ ☺

VD2. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng:

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$$

Trước hết xác định hàm số cần lấy tiếp tuyến: $f(a)=6a^3-a^2$

Thứ hai xác định điểm rơi: $a=b=c=d=\frac{1}{4}$

Thứ 3 xác định tiếp tuyến $y=pa+q$ tại điểm $a=\frac{1}{4}$, ta có: $\begin{cases} p=f'\left(\frac{1}{4}\right) \\ q=f\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}p \end{cases}$

Sử dụng máy tính tính biểu thức $\frac{d}{dx}(6X^3-X^2)\Big|_{x=\frac{1}{4}}$ ta được $p=\frac{5}{8}$, từ đó suy ra $q=-\frac{1}{8}$

Vậy các bạn đi chứng minh BĐT nhỏ: $6a^3-a^2\geq \frac{5}{8}a-\frac{1}{8}$

Sau cùng cộng vế bọn chúng lại rồi nhận lấy kết quả:

$6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq \frac{5}{8}(a+b+c+d)-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\ (dpcm)$ ☺

VD3. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

Trong đề thi không có chuyện "chuẩn hóa", nhưng do tính đối xứng của BĐT nên ngoài giấy nháp ta có quyền "chuẩn hóa" $a+b+c=3$ để dự đoán điểm rơi $a=b=c=1$, rồi tìm ra hướng giải cho trường hợp $a+b+c=3$, khi bưng vào đề chỉ việc giải theo cách tương tự là được.

Nhìn qua BĐT này, chắc chắn nhiều người thấy bất lực với cái tiếp tuyến, nhưng khi chuẩn hóa $a+b+c=3$ rồi thì chỉ sửa đổi 1 tí là sẽ ra hàm 1 biến ngay, cụ thể như sau:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$$

$$=\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}$$

$$=\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}+\frac{b^2+6b+9}{3b^2-6b+9}+\frac{c^2+6c+9}{3c^2-6c+9}$$

Vậy ta cần c/m: $\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}+\dfrac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3}+\dfrac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3}\le 24$

Chú ý cái điều kiện a, b, c dương nên $a,b,c\in(0;3)$.

Đến đây dễ rồi, tìm được tiếp tuyến là $y=4a+4$ vậy ta sẽ đi c/m $\dfrac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}\le 4a+4$ và 2 BĐT tương tự.

Vậy nếu bê nó vào đề thi thì phải trình bày như thế nào?

Đơn giản, chỉ cần chuyển nó về bài toán đã giải quyết ngoài giấy nháp là được.

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Tức là: đặt $a = kx; b = ky; c = kz\ (k > 0)$ sao cho $x + y + z = 3$, khi đó ta có $x, y, z \in (0;3)$

và BĐT cần c/m trở thành: $\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} + \frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2} + \frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2} \le 8$ ☺

Chúng ta sẽ sang VD4, tổng quát hơn một chút.

VD4 này sẽ cho các bạn tiếp xúc với dạng tổng quát của phương pháp tiếp tuyến chính là phương pháp hệ số bất định (UCT), đây là 1 phương pháp cực dễ nắm bắt.

VD4 ta sẽ làm có dạng: cho $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$ thỏa mãn $g(x_1) + g(x_2) + ... + g(x_n) = k$, chứng minh rằng $P = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \ge m$

Đây là BĐT đối xứng nên điểm rơi dự đoán sẽ là $x_i = x_0\ (i = \overrightarrow{1;n})$.

Ta giả sử BĐT phụ cần c/m có dạng: $f(t) \ge \alpha\left[g(t) - \frac{k}{n}\right] + \frac{m}{n}$, dấu "=" xảy ra tại $t = x_0$

Vấn đề là cần tìm xem α bằng bao nhiêu.

Theo trên ta có hàm số $h(t) = f(t) - \alpha\left[g(t) - \frac{k}{n}\right] - \frac{m}{n}$ sẽ đạt cực trị tại $t = x_0$, nói cách khác: $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \alpha g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Vậy BĐT phụ ta cần c/m là: $f(t) \ge \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\left[g(t) - \frac{k}{n}\right] + \frac{m}{n}$

Như vậy ta sẽ có $f(x_i) \ge \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\left[g(x_i) - \frac{k}{n}\right] + \frac{m}{n}$ trong đó $i = \overrightarrow{1;n}$

Cộng các BĐT phụ lại ta được: $P \ge \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\left[g(x_1) + g(x_2) + ... + g(x_n) - k\right] + m = m\ (dpcm)$

Đấy chính là phương pháp UCT. ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

Trong phương pháp này, các bạn cần phải nắm thêm 1 mẹo nữa của cái điều kiện, đó là nếu đề mà cho (hoặc ta chuẩn hóa) $g(x_1)g(x_2)...g(x_n)=k$ thay vì tổng như trên, thì để áp dụng được phương pháp này, các bạn cần chuyển nó về dạng tổng bằng cách lấy logarit 2 vế: $\ln[g(x_1)g(x_2)...g(x_n)]=\ln k \Leftrightarrow \ln g(x_1)+\ln g(x_2)+...\ln g(x_n)=\ln k$

Vậy câu hỏi đặt ra là cái BĐT phụ trên có chắc đúng hay không?

Đáp: nó không phải luôn đúng, nhưng hầu hết đúng trong loại bài mà các bạn sẽ thi. Nếu nhỡ may nó không đúng, khi đó ta phải chia trường hợp theo điều kiện rồi xét sự đổi dấu, nọ kia... để giải quyết tiếp. ☺

Được rồi, bây giờ chúng ta áp dụng làm VD4.

VD4. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=3(a+b+c)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Viết lại $P=3a+\frac{2}{a}+3b+\frac{2}{b}+3c+\frac{2}{c}\Rightarrow\begin{cases} f(t)=3t+\frac{2}{t} \\ g(t)=t^2\end{cases}$

BĐT phụ ta cần c/m có dạng: $f(t)\geq pt^2+q$

Vì điểm rơi chính là $a=b=c=1$, do đó theo công thức đã chứng minh, ta bấm máy được

$p=\dfrac{\frac{d}{dx}\left(3X+\frac{2}{X}\right)\Big|_{x=1}}{\frac{d}{dx}(X^2)\Big|_{x=1}}=\frac{1}{2}$, từ đó suy ra $q=f(1)-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

Vậy nói chung điểm quan trọng của bài toán là ta phải c/m BĐT: $3a+\frac{2}{a}\geq\frac{1}{2}a^2+\frac{9}{2}$

1 biến, không có gì là khó cả, các bạn tự làm tiếp nhé! ☺

Lâm Hữu Minh - sherlockttmt@gmail.com

VD5. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\frac{a(a^2-bc)}{2a^2+bc}+\frac{b(b^2-ca)}{2b^2+ca}+\frac{c(c^2-ab)}{2c^2+ab}\ge 0$

Bài này lại khó hơn cả VD3 nữa, nhưng nếu ở đó ta đã chuẩn hóa, vậy tội gì ở đây không chuẩn hóa 1 phát nhỉ! ☺

Nhìn theo cụm thì ta nhận thấy BĐT cần c/m chỉ chứa 2 số hạng là a và bc, mặt khác phải chuẩn hóa làm sao cho nó có dạng $f(a)+f(b)+f(c)\ge 0$, do đó ta chuẩn hóa abc = 1

Khi đó, BĐT trên trở thành: $\frac{a\left(a^2-\frac{1}{a}\right)}{2a^2+\frac{1}{a}}+\frac{b\left(b^2-\frac{1}{b}\right)}{2b^2+\frac{1}{b}}+\frac{c\left(c^2-\frac{1}{c}\right)}{2c^2+\frac{1}{c}}\ge 0$

Viết gọn lại là $\frac{a(a^3-1)}{2a^3+1}+\frac{b(b^3-1)}{2b^3+1}+\frac{c(c^3-1)}{2c^3+1}\ge 0$

Điều kiện abc = 1 chưa đúng dạng ta cần, vì thế ta áp dụng logarit hóa:

$\ln(abc)=\ln 1\Leftrightarrow \ln a+\ln b+\ln c=0\Rightarrow$ điểm rơi là $a=b=c=1$

Vậy theo UCT, ta phải c/m BĐT phụ: $\frac{a(a^3-1)}{2a^3+1}\ge p\ln a+q$, trong đó:

$$p=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{X^4-X}{2X^3+1}\right)\Big|_{x=1}}{\frac{d}{dx}(\ln(X))\Big|_{x=1}}=1\Rightarrow q=f(1)-\ln 1=0$$

BĐT $\frac{a(a^3-1)}{2a^3+1}\ge \ln a$ các bạn có c/m được không? Vì nó chứa $\ln a$ là hàm khác loại và thao tác khó so với hàm đa thức nên lúc này chỉ có đạo hàm là c/m được dễ nhất thôi! ☺

Mục này mình chỉ đưa 5 VD cùng với phương pháp phổ biến như vậy thôi, phương pháp này dễ sử dụng nên mình không phải thêm tí gì nữa, các bạn có thể search Google để tìm thêm bài tập dạng này nếu muốn luyện tập và khám phá! ☺

LỜI KẾT

Dự liệu của mình là cuốn sách này sẽ ra mắt vào năm 2014 để các bạn cùng tuổi mình (sinh năm 1997) có tài liệu luyện thi năm 2015, nhưng do 1 số việc quan trọng khác đã khiến mình hoãn nó lại đến tận 23/8/2015 mới hoàn thành được.

Và bây giờ, nó trở thành tài liệu luyện thi cho 98er trở về sau và là nguồn tham khảo cho bất kì ai muốn nghiên cứu các kỹ thuật CASIO để phục vụ cho việc học tập.

Cuốn sách này là tâm huyết của mình trong thời gian gần 1 năm rưỡi, nó là một cuốn sách tổng hợp và sáng tạo những chiêu thức sử dụng máy tính CASIO trong học tập rất quý giá. Mình soạn nó không chỉ vì đam mê nghiên cứu Toán học mà còn hướng đến mục tiêu góp phần vào việc tối ưu hóa điểm số môn Toán của những thế hệ học sinh phía sau.

Do đó, hi vọng các bạn sau khi học xong, hãy không những dùng nó phục vụ tích cực cho việc học tập, mà còn dùng nó truyền cảm hứng sáng tạo cho những thế hệ sau của mình.

Một ước mơ nhỏ nhoi, có vậy thôi! ☺